This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

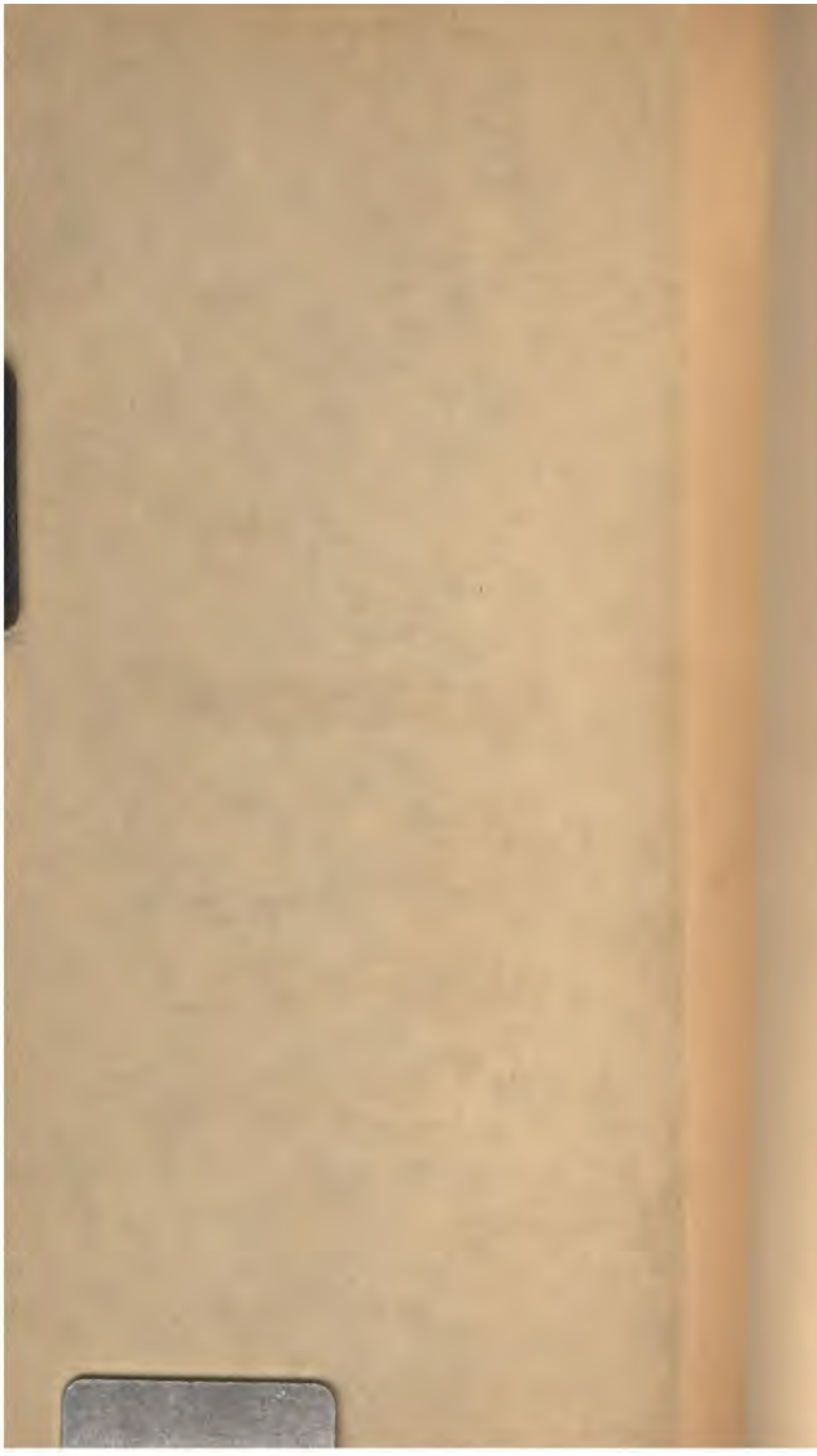
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06639325 1



FAA
Archive

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Siebenter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1846.

PAA
Arch

Archiv

der

lathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Siebenter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1846.

Inhaltsverzeichniss des siebenten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
II.	Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände, als Fortsetzung des Aufsatzes X. in Thl. V. Heft 2. Von dem Herrn Doctor Barfuss zu Weimar	I.	3
IV.	Nochmalige Einreden gegen Herrn Doctor Schlömilch. Von Demselben	I.	29
V.	Ueber das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx dx$. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	I.	38
VI.	Ueber das von Herrn Clausen in Thl. V. Heft 2. S. 279. angegebene Theorem. Von Demselben	I.	46
XII.	Einige Bemerkungen über die Abhandlung Thl. VI. Heft 2. Nro. XXIX. Von dem Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg	I.	107
XII.	Mathematische Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen	I.	112
XIV.	Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in Band VI. Heft 1. dieses Archivs. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	II.	149
XV.	Ueber Poinsot's Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen. Von dem Herausgeber	II.	153
XVI.	Ueber eine Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen. Von Demselben	II.	162

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XVII.	Ueber Poinsot's neue Beweise einiger Hauptsätze der Zahlenlehre. Von Demselben . .	II.	168
XXI.	Allgemeine Sätze für eine Theorie der höheren Differentialquotienten. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	II.	204
XXIII.	Einige Bemerkungen über die Wörter Variation, variabel u. s. w. Von dem Herrn Doctor G. Strauch, Lehrer der Mathematik zu Muri im Kanton Aargau	II.	221
XXVII.	In quaestionem a Celeb. A. Göpel in T. VI. pag. 33. propositam complete solvendam. Auct. Dr. E. G. Björling, ad Academ. Upsal. Docens Mathes.	III.	266
XXVIII.	Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx$ und $\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx$. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	270
XXXII.	Eigenthümliche, leicht fassliche, in systematischem Zusammenhange stehende Beweise bekannter wichtiger Sätze aus der Combinationslehre. Von dem Herrn Professor Dr. Hessel an der Universität zu Marburg	III.	295
XXXIII.	Ueber die Auflösung der Gleichung $ax+by+cz=0$, wo a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, in ganzen Zahlen. Aus einer Abhandlung von Cauchy (Exercices de Mathématiques. 9me Livraison.) ausgezogen von dem Herausgeber	III.	305
XXXV.	Sur les fractions partielles. Par Monsieur Ubbo H. Meyer de Groningue	III.	316
XXXVI.	Ein Theorem über Fakultäten. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	331
XXXVIII.	Die verschiedenen Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	III.	334
XL.	Ueber Legendre's Theorem von den Euler'schen Integralen zweiter Art. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	IV.	348
XLI.	Ueber die Verwandlung der Funktionen einer Veränderlichen in Reihen, welche nach stei-		

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
	genden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten. Von Demselben	IV.	353
XLIII.	Ueber zwei Sätze aus der Algebra und der Zahlenlehre. Nach der Abhandlung: Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres par M. Poinsot in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville. Janvier et Février 1845. frei bearbeitet von dem Herausgeber	IV.	367
XLIV.	Applications des théorèmes relatifs à la théorie des fractions particlles. Par Monsieur Ubbo H. Meyer de Groningue	IV.	386
XLV.	Ein Paar einfache Anwendungen der geometrischen Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf cubische Gleichungen. Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover . .	IV.	402
XLVI.	Ueber die geometrische Darstellung complexer Functionen. Von Demselben	IV.	411
XLVII.	Zur Entwickelung in Reihen und Summirung der Reihen. Von dem Herrn Dr. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	IV.	430
	Geometrie.		
VII.	Ueber die Construction der Normalen, Tangenten und Krümmungshalbmesser an solchen Curven, welche durch einen Punkt beschrieben werden, der mit zwei andern nach einem gegebenen Gesetze sich bewegenden Punkten fest verbunden ist. Von dem Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg	I.	48
VIII.	Beweis des Lehrsatzes: Wenn ein beliebiges Dreieck in einer Ebene so bewegt wird, dass sich die Endpunkte seiner Basis fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden befinden, so wird von seiner Spitze eine Ellipse beschrieben. Von Demselben	I.	64
XII.	Ueber die Trisection des Winkels. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	I.	108
XIII.	Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	II.	113

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Se
XXIII.	Note sur quelques propriétés des arcs egaux de la lemniscate. Par M. Chasles	II.	
XXIX.	Metrische Relationen im Gebiete der perspektivischen Projektion. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	
XXX.	Einige neue Beweise von Lehrsätzen aus der Elementar-Stereometrie. Von dem Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg	III.	
XXXIX.	Entwickelung der Gleichungen der Loxodromen auf den Flächen der zweiten Ordnung. Von dem Herrn Dr. J. R. Boyman, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Malmedy	IV.	
XLVIII.	Beiträge zu den Elementen der Geometrie. Von Herrn Rudolf Wolf, Docenten der Mathematik und Archivar der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu Bern	IV.	
	Trigonometrie.		
XII.	Ueber die Auflösung der Gleichung $(\sin\frac{1}{3}C)^3 - \frac{3}{4}\sin\frac{1}{3}C + \frac{1}{4}\sin C = 0$. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin . .	I.	
XII.	Ueber die Reihen $\sin x + \sin(x+z) + \sin(x+2z) + \ldots + \sin(x+nz)$ und $\cos x + \cos(x+z) + \cos(x+2z) + \ldots + \cos(x+nz)$. Von Demselben	I.	
XXIV.	Zur sphärischen Trigonometrie. Von dem Herrn Doctor Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	III.	
	Geodäsie.		
I.	Ueber die Ursache der Oscillationen der Luftblase einer Libelle oder eines Niveau's . . .	I.	
IX.	Völlig strenge und allgemeine Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie. Von dem Herausgeber	I	
XII.	Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel. Von Demselben	I.	
XXV.	Ueber die in dem Aufsatze Theil III. Nr. VII. aufgelöste geodätische Aufgabe. Von Demselben	III.	

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Mechanik.		
X.	Ueber die naturphilosophischen Principien der Bewegungslehre. (Fortsetzung der Abhandlung Thl. V. Nr. XXI.) Von dem Herrn Dr. Barfuss zu Weimar	I.	93
XXVI.	Schreiben des Herrn Professor Steichen an der École militaire Belgique zu Brüssel an den Herausgeber	III.	260
XXXIV.	Ueber die Cycloide als Brachystochrone. Von dem Herausgeber	III.	308
XLII.	Ueber eine Anwendung des in der Abhandlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. bewiesenen Hauptsatzes der Theorie der bestimmten Integrale. Von Demselben	IV.	358
	Astronomie.		
XVIII.	Die Epochen der Geschichte der Menschheit; eine historisch-philosophische Skizze von Dr. E. F. Apelt, ausserordentlichem Professor zu Jena	II.	181
XIX.	Auflösung des Keplers'chen Problems nach Newton, verglichen mit der jetzt noch gebräuchlichen numerischen Auflösung, mitgetheilt von dem Herrn Dr. J. Ph. Wolfers, astronomischen Rechner an der K. Sternwarte zu Berlin	II.	184
	Physik.		
XII.	Formel für die Ausdehnung der Dämpfe. Von Herrn Bary, professeur de Physique au collége de Charlemagne	I.	103
XX.	Welche Lage muss man einem Stahlstabe geben, damit er das Maximum der magnetisirenden Wirkung eines kreisförmigen electrischen Stromes erfahre? Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	II.	190
XXXI.	Ueber die Dehnung und das Zerreissen prismatischer Körper unter der Voraussetzung, dass die spannende Kraft ausserhalb der Schwerpunkts-Achse des Körpers wirkt. Von dem Herrn Fabriken-Commissions-Rathe A. F. W. Brix zu Berlin	III.	288

au moyen de quelques expériences spéciales. A l'état d'équilibre, la pression est égale dans toute la masse d'un fluide, quelle que soit la différence de la température de ses diverses parties; conséquemment, ce n'est point dans le fluide seul qu'il fallait chercher la cause de ces variations, mais dans l'addition d'une résistance étrangère. Cette résistance est le produit de l'attraction capillaire du verre pour l'eau ou pour l'alcool, résistance qui est égale sur toute la paroi du tube, lorsque ce dernier possède la même température en tous ses points, mais qui s'affaiblit inégalement lorsque la température n'est point uniforme. Lors donc que le liquide renfermé dans ce tube varie de température d'une manière inégale, lorsqu'une des extrémités du niveau est plus échauffée que l'autre, la force capillaire y est affaiblie, ainsi que la résistance au déplacement de la bulle d'air: cette dernière, placée entre deux forces dissemblables, s'avance vers la portion chauffée, jusqu'au nouvel équilibre qui s'établit entre la moindre résistance d'une part et la pesanteur croissante de l'autre.

„Une expérience très simple démontre combien cette résistance capillaire est puissante dans le déplacement de la bulle d'air. J'ai fait entrer deux cylindres d'eau, distants de 5 à 10 centimètres, dans un tube capillaire ouvert par les deux bouts, afin de leur laisser toute la liberté de leur mouvement. On pose le tube horizontalement, et lorsque le tout est équilibré, on chauffe l'un des cylindres d'eau. La bulle marche d'abord quelque peu vers le côté chauffé, mais bientôt, en s'échauffant par son contact avec le cylindre chaud ou par la flamme de la lampe que l'on passe au-dessous du tube, elle s'agrandit en s'étalant d'un seul côté, du côté où l'on a diminué la résistance capillaire par l'élévation de la température: l'autre cylindre d'eau reste stable à la même place. Si la différence des températures est faible, le côté froid recule lorsqu'on chauffe la bulle d'air, mais toujours moins que le côté chaud et dans la proportion de leur différence. Dans le niveau d'eau, la bulle d'air soumise, comme dans l'expérience précédente, à deux résistances inégales, s'allonge ou se déplace en raison de leur différence et cause des erreurs d'observation parce que l'on rectifie l'instrument d'après la nouvelle position qu'elle a prise.

„Lorsque l'on emploie le mercure au lieu d'eau ou d'alcool, la cause d'erreur que nous venons de rappeler existe également, mais la marche de la bulle d'air est en sens inverse. Sa progression ou son extension se fait du côté froid. La raison de cette inversion est facile à démontrer. Dans un tube de verre, le mercure n'est pas en contact avec la substance même du tube, mais avec la couche de vapeur d'eau qui est toujours attenante aux parois. Le mercure et le verre ont une grande affinité d'adhésion l'un pour l'autre, comme le prouve l'étamage des tubes barométriques dans lesquels on fait bouillir trop longtemps le mercure. Dans l'état ordinaire, il y a une couche de vapeur d'eau, interposée entre le verre et le mercure, qui s'oppose à leur adhésion. En chauffant l'un des cylindres de mercure, on diminue d'une part la force capillaire du verre pour la vapeur et d'autre part on amincit cette même couche séparatrice. Il en résulte que l'attraction du tube pour le mercure croît à mesure qu'on détruit l'obstacle qui les séparait, et en même temps la résistance au déplacement:

lors donc que l'on chauffe la bulle d'air, la résistance du côté chauffé étant devenue supérieure à celle du côté froid, c'est ce dernier qui recule et le côté chaud reste en repos ou se déplace moins que l'autre. Voilà, suivant nous, la cause du déplacement de la bulle d'air dans les niveaux d'eau ou d'alcool.

II.

Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände, als Fortsetzung des Aufsatzes X. in Thl. V. Heft 2.

Von dem

Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.

---

§. 1.

Es scheint mir nöthig, dass ich einige Worte über den Gesichtspunkt vorausschicke, aus welchem man diese und die etwa noch folgenden Abhandlungen ähnlichen Inhaltes zu betrachten habe. Als ich mich in dem Aufsatze XXV. (Theil IV.) zum ersten Male gegen die gegenwärtig von vielen Mathematikern verfolgte Richtung in der Analysis erklärte, kam es mir zunächst nur darauf an, die Grundlosigkeit der gegen die älteren Theorien gerichteten Vorwürfe an eben den Beispielen nachzuweisen, von welchen die Gegner, im Vertrauen auf eine scheinbar strenge Rechnung, ihre Beweisgründe entnehmen. Beispiele der Art liessen sich zu Hunderten vermehren und auf eine ganz ähnliche Weise behandeln; allein da dieser Weg auf Wissenschaftlichkeit kaum einige Ansprüche machen dürfte, und leicht zu fruchtlosem Hin- und Herreden führt, so verliess ich ihn sogleich wieder und suchte vielmehr die wichtigsten Momente der Theorie und die dabei obwaltenden Schwierigkeiten in einem mehr systematischen Zusammenhange zu erörtern. Die Abhandlung X. in Theil V. soll der Anfang dieser Erörterungen sein, und vielleicht darf ich hoffen, nicht nur über die hier in Rede stehenden Grundgedanken einiges Licht verbreitet, sondern auch die echte Grundlage der binomischen, der exponentiellen und der logarithmischen Entwickelungen nachgewiesen und dieselben in ihr richtiges Verhältniss zur Elementararithmetik, wie diese bis jetzt sich gebildet hat, gesetzt zu haben. Die letzte Grundlage dieser Entwickelungen ist

der arithmetische Satz von der Multiplication der Summe, wi nämlich das Totalproduct als eine Summe von Partialproducte der Glieder erscheint, die sich in besondern Fällen nach gewisse Gesetzen zusammenstellen lassen. Dabei meine ich durchau nicht, Neues vorgetragen zu haben; das Wesentliche ist scho oft, und namentlich in der mathematischen Naturphilosophie vo Fries gelehrt worden.

§. 2.

Meine nächste Absicht ist nun die, dass ich, dem gewöhnl chen Gange zu Folge, an die Exponentialreihen die trigonometr schen Entwickelungen anschliesse und deren Fundamente erklär Hierbei stösst man allerdings auf einige Schwierigkeiten, dere Lösung die neuere Analysis, indem sie nur convergirende Reihe zulassen will, bei Seite schiebt, freilich ohne zu beachten, das die Convergenz oder Divergenz der Reihen mit diesen Schwierig keiten nicht die entfernteste Verwandtschaft hat. — Der wichtigst Schritt in dieser Lehre ist dann geschehen, wenn die Relatio zwischen dem Bogen und seinen trigonometrischen Functionen g funden ist und hierfür habe ich den Grundgedanken schon frühe ausgesprochen. Gewöhnlich gründet man die Entwickelungen a die Reihen:

$$\sin mx = m_1 \cos x^{m-1} \sin x - m_3 \cos x^{m-3} \sin x^3 + \ldots,$$

$$\cos mx = \cos x^m - m_2 \cos x^{m-2} \sin x^2 + m_4 \cos x^{m-4} \sin x^4 \ldots$$

wo, wie bekannt, m_1, m_2, u. s. w. die Binomialcoefficienten fü den Exponenten m bedeuten. In der That empfehlen sich diese ben durch ihre Einfachheit für den besagten Zweck besser al andere zusammengesetztere, besonders da sie für ein ganzes abso lutes m auf einem sehr elementaren Wege gefunden werden kön nen. Für andere Werthe von m muss man die nach Moivre be nannten Formeln zu Hülfe nehmen; dieselben verursachen jedoc bei gebrochenen Exponenten, wegen der Vieldeutigkeit der Wur zeln, einige Schwierigkeiten, die vielleicht bis jetzt noch nich genügend gelöst sind. Ja es scheint, als ob einige Mathematike ein Misstrauen in den Gebrauch der imaginären Grössen setzten andere glauben wenigstens der Wissenschaft einen Dienst zu thun wenn sie die Betrachtung des Imaginären so viel als möglich be seitigen und dasselbe in ein höheres Gebiet der Analysis verwei sen, gleichsam als ob dazu eine höhere mathematische Einsich gehöre, wo man dann freilich fragen möchte, was elementarer se als diejenigen Formen, auf welche uns schon die Auflösung qua dratischer Gleichungen hinweist.

Einen grossen Mangel fühlt man freilich bei allen bisherige Darstellungen der Moivreschen Formeln dadurch, dass man übe den Zweck und die Bedeutung der Form $i = \sqrt{-1}$ gar keine Aus kunft findet, und ich möchte gar fragen, ob irgend ein Schriftstel ler darüber im Klaren gewesen sei. Wenigstens beruht jener un glückselige Streit über die Eulersche Reihe

$$2^n \cos a^n = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a + \ldots$$

iglich auf einem Missverständnisse der Bedeutung von i in den ivreschen Formeln. Ich will daher dieselben nach meinen Kräf- erläutern und bei ihrer Feststellung mich des allgemeineren ichens $\sqrt{k-1}$ statt $\sqrt{-1}$ bedienen.

§. 3.

Multiplicirt man die beiden Ausdrücke

$$p_1 = \cos a_1 + \sqrt{k-1}.\sin a_1,$$
$$p_2 = \cos a_2 + \sqrt{k-1}.\sin a_2$$

it einander, so findet man leicht

$$p_1 p_2 = \cos(a_1+a_2) + \sqrt{k-1}.\sin(a_1+a_2) + k \sin a_1 \sin a_2.$$

Multiplicirt man nochmals mit

$$p_3 = \cos a_3 + \sqrt{k-1}.\sin a_3,$$

n findet sich

$$p_1 p_2 p_3 = \cos(a_1+a_2+a_3) + \sqrt{k-1}.\sin(a_1+a_2+a_3) + k(\sin(a_1+a_2)\sin a_3 + p_3 \sin a_1 \sin a_2),$$

nd wenn noch ein vierter Factor

$$p_4 = \cos a_4 + \sqrt{k-1}.\sin a_4$$

kommt:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \cos(a_1+a_2+a_3+a_4) + \sqrt{k-1}.\sin(a_1+a_2+a_3+a_4) + k(\sin(a_1+a_2+a_3)\sin a_4 + p_4 \sin(a_1+a_2)\sin a_3 + p_3 p_4 \sin a_1 \sin a_2).$$

Man kann hieraus schon das Bildungsgesetz für beliebig viele toren abnehmen, denn man findet:

$$\text{I)}\quad p_1 p_2 p_3 \ldots p_m = \cos(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m) + \sqrt{k-1}.\sin(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m)$$
$$+ k \left\{ \begin{array}{l} \sin(a_1+a_2+a_3+\ldots a_{m-1})\sin a_m \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-2})\sin a_{m-1}.p_m \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-3})\sin a_{m-2}.p_{m-1}p_m \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-4})\sin a_{m-3}.p_{m-2}p_{m-1}p_m \\ \text{u. s. w.} \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-r})\sin a_{m-r-1}.p_{m-r-2}\ldots p_m \\ \text{u. s. w.} \\ + \sin a_1 \sin a_2 . p_3 p_4 p_5 \ldots p_m. \end{array} \right.$$

Nehmen wir nun alle a einander gleich, so werden auch alle p identisch, und man erhält die besondere Gleichung

$$\text{II)}\quad p^m = \cos ma + \sqrt{k-1}.\sin ma$$
$$+k\sin a \left\{ \begin{array}{l} \sin(m-1)a + p\sin(m-2)a + p^2\sin(m-3)a \\ +p^3\sin(m-4)a + \ldots\ldots p^{m-2}\sin a \end{array} \right\}$$

und diese beiden Ausdrücke sollen den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegen. $\sqrt{k-1}$ kann sowohl eine positive als auch eine negative Grösse vorstellen.

§. 4.

Die Gleichung II) enthält zunächst das Mittel zur Summirung der Reihen:

$$\Sigma(v^m \sin ma) = v\sin a + v^2\sin 2a \ldots\ldots + v^m \sin ma,$$
$$\Sigma(v^m \sin ma) = 1 + v\cos a + v^2\cos 2a \ldots\ldots + v^m \cos ma.$$

Obgleich dieselben einem jeden bekannt sind, so darf ich sie hier doch nicht ganz mit Stillschweigen übergehen, da sie in speciellen Fällen einige Schwierigkeiten darbieten, welche die Anhänger der neueren Ansichten gern zu ihrem Vortheil auslegen möchten. Da in der Gleichung II) k jede beliebige Grösse sein darf, so kann man $p = \cos a + \sqrt{k-1}.\sin a$ als unabhängig von a ansehen, wenn dann nur k aus p und a bestimmt wird. Man hat zunächst:

$$\frac{p^m - \cos ma - \sqrt{k-1}.\sin ma}{k\sin a} = \sin a.p^{m-2} + \sin 2a.p^{m-3} \ldots\ldots$$
$$+\sin(m-2)a.p + \sin(m-1)a,$$

und dann

$$\sqrt{k-1} = \frac{p-\cos a}{\sin a}, \qquad k = \frac{1-2p\cos a + p^2}{\sin a^2}.$$

Werden diese Werthe in die letzte Gleichung gesetzt und dividirt man zugleich beiderseits mit p^{m-1}, so findet man

$$\frac{p^m \sin a + \sin(m-1)a - p\sin ma}{(1-2p\cos a + p^2)p^{m-1}}$$
$$= \frac{\sin a}{p} + \frac{\sin 2a}{p^2} + \ldots + \frac{\sin(m-1)a}{p^{m-1}}.$$

Setzt man aber $\frac{1}{p} = v$ und m statt $m-1$, so erhält man sogleich:

$$\text{III)}\quad v\sin a+v^2\sin 2a+v^3\sin 3a\ldots\ldots+v^m\sin ma$$
$$=\frac{v\sin a+v^{m+2}\sin ma-v^{m+1}\sin(m+1)a}{1-2v\cos a+v^2}.$$

Multiplicirt man nun von den Gleichungen:

$$\Sigma(v^m\sin ma)=v\sin a+v^2\sin 2a+\ldots.\,v^m\sin ma,$$
$$\Sigma(v^m\cos ma)=1+v\cos a+v^2\cos 2a+\ldots v^m\cos ma$$

die erste mit $v\cos a$, die zweite mit $v\sin a$ und addirt die Producte, so erhält man

$$v\cos a\,.\,\Sigma(v^m\sin ma)+v\sin a\,.\,\Sigma(v^m\cos ma)$$
$$=v\sin a+v^2\sin 2a\,.\,\ldots.+v^{m+1}\sin(m+1)a=\Sigma(v^{m+1}\sin(m+1)a);$$

also, wenn man die Formel III) zu Hilfe nimmt:

$$\text{IV)}\quad 1+v\cos a+v^2\cos 2a+\ldots\ldots v^m\cos ma$$
$$=\frac{1-v\cos a+v^{m+2}\cos ma-v^{m+1}\cos(m+1)a}{1-2v\cos a+v^2}.$$

Die Reihen in III) und IV) stellen blosse Summen und keine Entwickelungen vor. Einen grossen Irrthum begeht man aber, wenn man die Summe dadurch in eine Entwickelung zu verwandeln glaubt, dass man den Zeiger des allgemeinen Gliedes unendlich nimmt. Doch hiervon ist schon die Rede gewesen. Will man die Functionen haben, aus welchen die ins Unbestimmte fortgesetzten Reihen

$$v\sin a+v^2\sin 2a+v^3\sin 3a+\ldots\ldots,$$
$$1+v\cos a+v^2\cos 2a+v^3\cos 3a+\ldots\ldots$$

entwickelt werden können, so muss man Alles, was in den Summenformeln noch vom Stellenzeiger m abhängt, weglassen. Man erhält dadurch:

$$\text{V)}\quad v\sin a+v^2\sin 2a+v^3\sin 3a+\ldots\ldots=\frac{v\sin a}{1-2v\cos a+v^2},$$

$$\text{VI)}\quad 1+v\cos a+v^2\cos 2a+v^3\cos 3a+\ldots\ldots=\frac{1-v\cos a}{1-2v\cos a+v^2}.$$

Denn man hat z. B. aus III):

$$\frac{v\sin a}{1-2v\cos a+v^2}=v\sin a+v^2\sin 2a+\ldots.\,v^m\sin ma$$
$$-\frac{v\sin ma-\sin(m+1)a}{1-2v\cos a+v^2}\,v^{m+1},$$

und da dieses nun für jeden Werth von m gilt, so folgt eben, dass die Entwickelung in V) richtig ist. Zugleich folgt hieraus, dass

$-\frac{v\sin ma-\sin(m+1)a}{1-2v\cos a+v^2}v^{m+1}$ die Entwickelung von $v^{m+1}\sin(m+1)a$ $+v^{m+2}\sin(m+2)a+\ldots$ sein muss. Diejenigen, welche nur convergirende Reihen zulassen wollen, kommen der Hauptsache nach auf dasselbe zurück; sie verwandeln die Summe durch Weglassung eines Theiles der Summenformel in eine Entwickelung, beurtheilen aber das, was man weglassen muss, danach, ob es für den unendlich grossen Stellenzeiger m verschwindet, wobei sie denn den Werth der allgemeinen Grösse in der Entwickelung in gewisse Grenzen einschliessen müssen.

Setzt man in V) und VI) $v=1$, so findet sich

$$\text{VII)}\quad \sin a+\sin 2a+\sin 3a\ldots.=\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a,$$

$$\text{VIII)}\quad 1+\cos a+\cos 2a+\cos 3a\ldots.=\tfrac{1}{2}.$$

Diese Ausdrücke haben in den Fällen, wo $a=0$ oder $=\pm 2n\pi$ ist, ihre Schwierigkeiten, die ich nun gründlich beseitigen will. Schon früher habe ich die Frage aufgeworfen, welchen Werth der Ausdruck $\frac{1-v\cos a}{1-2v\cos a+v^2}$ habe, wenn $v=1$ und $a=0$ genommen wird. Nimmt man erst $a=0$, so hat man $\frac{1-v}{(1-v)^2}=\frac{1}{1-v}$, welches denn für $v=1$ unendlich wird. Wird aber erst $v=1$ gesetzt, so wird jener Ausdruck von a ganz unabhängig und $=\frac{1}{2}$. Diese beiden Werthe müssen dem Ausdrucke $\frac{1-v\cos a}{1-2v\cos a+v^2}$ in dem genannten Falle doch wohl zukommen, und folglich stellt auch die Entwickelung eben diese beiden Werthe dar. Die Entwickelung $1+\cos a+\cos 2a+\ldots.$ hat nämlich allerdings den Werth $\frac{1}{2}$ für $a=0$, der ihr für alle übrigen a zukommt; allein sie wird in diesem Falle zugleich auch identisch mit anderen Entwickelungen, denen der Werth ∞ zukommt. Sucht man dieselbe auf einem anderen Wege, als dem obigen, so wird sich die Unbestimmtheit für $a=0$ allemal offenbaren.

Wenn ich nun mit dem Ausdrucke $\frac{1}{2}=1+\cos a+\cos 2a+\ldots.$ rechne, so muss ich Acht haben, ob $a=0$ wird oder nicht. Im ersten Falle rechne ich mit einem nicht allgemein richtigen Werthe der Entwickelung und erhalte, wenn auch nicht gerade falsche, doch wenigstens einseitige Resultate. Dann muss man zu der allgemeineren Formel in VI) zurückgehen, und um dieses durch ein Beispiel zu erklären, wähle ich ein schon früher besprochenes.

Herr Doctor Schlömilch sagt in seiner Abhandlung (Thl. III. Seite 277.), wenn man die (unrichtige) Gleichung

$$\cos x+\cos 2x+\ldots.=-\tfrac{1}{2}$$

mit $f(x).dx$ multiplicire und zwischen den Grenzen 0 und a integrire, so erhalte man:

$$A)\quad \int_0^a f(x)dx+2\left[\int_0^a f(x)\cos x\,dx+\int_0^a f(x)\cos 2x\,dx+\ldots.\right]=0.$$

Weil aber eigentlich

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

sei, so folge, dass der Ausdruck in A) nicht $=0$ sein könne, sondern derselbe sei vielmehr

$$= \mathrm{Lim} \int_0^a \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x)\,dx$$

für wachsende n, worüber man in Thl. I. Seite 417. nachlesen könne, wo jener mit Lim. bezeichnete Ausdruck $=\pi f(0)$ gefunden wird. Aber es ist doch

$$\mathrm{Lim} \int_b^a \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x)dx = 0,$$

und nur wenn $b=0$ ist, findet die Ausnahme statt. Man subtrahire nun in VI) beiderseits $\frac{1}{2}$, so wird

$$\tfrac{1}{2} + v\cos x + v^2\cos 2x + \ldots = \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{1-2v\cos a + v^2},$$

also

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx + 2\left[v\int_0^a \cos x\varphi(x)dx + v^2\int_0^a \cos 2x\,\varphi(x)\,dx + \ldots\right]$$
$$= J = (1-v^2)\int_0^a \frac{\varphi(x)\,dx}{1-2v\cos x + v^2}.$$

Damit ich hier nicht zu weit von meinem Zwecke abkomme, will ich $\varphi(x)$ constant $=\beta$ setzen. Dann ist das allgemeine Integral $J = \beta\,.\arccos\frac{-2v+(1+v^2)\cos x}{1-v\cos x+v^2} + \mathrm{Const}$, also J zwischen den Grenzen $\pm 2n\pi$ und $a = \beta\,.\arccos\frac{-2v+(1+v^2)\cos a}{1-v\cos a+v^2} - \beta\arccos(1)$. Dieses verwandelt sich für $v=1$ in $\beta\arccos(-1) - \beta\arccos(1)$, worin der Ausdruck $\pi\beta$ enthalten ist. Zwischen den Grenzen $\pm n\pi$ und $\pm m\pi$ verwandelt sich der allgemeine Ausdruck J in $\beta\arccos(1) - \beta\arccos(1)$.

Wenn man aber in dem allgemeinen Integral J von vorn herein $v=1$ nimmt, so erhält man zwischen zwei beliebigen Grenzen $J = \arccos(-1) - \arccos(-1)$, worin der Werth 0 begriffen ist. Die mordernen Demonstrationen stellen noch die Bedingung, dass a nicht $> \frac{1}{2}\pi$ oder wenigstens nicht grösser als π sein solle, was aber nach Obigem offenbar unrichtig ist. Ueberhaupt bin ich der Meinung, dass die Sache durch die jüngst betretenen Wege am wenigsten erledigt ist und dass wir uns, in Folge obiger Darstellung, veranlasst fühlen sollten, tiefere Untersuchungen über die nach La Grange und Fourier benannten Formeln anzustellen, und

dabei auf Gründe zu fussen, welche uns tiefer in die Natur der Sache eindringen lassen, als die Con- und Divergenz. Doch mehr zu sagen, ist hier die Stelle nicht.

Gleicher Behandlung, wie die Reihe in VIII), unterliegt auch die in VII). Dieselbe giebt uns für $a=0$ das paradoxe Resultat $0+0+0+\ldots\ldots=\infty$. Dieses Paradoxon lässt sich freilich durch den Rest der Reihe erklären; allein wenn man in dem allgemeineren Ausdrucke V) $a=0$ nimmt, so erhält man wieder $0+0+\ldots\ldots=0$. Indem man solche Unbestimmtheiten endlicher Formeln bloss an ihren Entwickelungen bemerkt, kann man freilich zu dem Fehlschlusse gelangen, dass der Grund aller Irrungen in der Divergenz liege.

Zuletzt will ich noch an einem Beispiele zeigen, wie klar die analytische Sprache der Reihe VII) sei, ungeachtet ihrer Unbestimmtheit für $a=0$. Setzt man für $\sin a$ die Reihe $a-\frac{a^3}{1.2.3}+\ldots$ und so auch für $\sin 2a$ u. s. w., so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a=(1+2+3+\ldots.)a-(1^3+2^3+3^3\ldots.)\frac{a^3}{1.2.3}\cdots.$$

Nun ist $1+2+3\ldots$ der Werth der Entwickelung von $\frac{1}{(1-x)^2}$ für $x=1$, $1^3+2^3+3^3\ldots$ der Werth der Entwickelung von $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$ für $x=1$ u. s. w. Also hätten wir $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a=\infty a-\frac{\infty^4 a^3}{1.2.3}+\ldots.$

Da nun bekanntlich eine Function nicht nach lauter positiven Potenzen der Hauptgrösse entwickelt werden kann, wenn die Coefficienten der Reihe unendlich werden, so sagt die Formel VII), dass man die Cotangente nicht nach lauter positiven Potenzen des Bogens entwickeln könne. Doch so etwas wird benutzt, um die Richtigkeit der divergirenden Reihen in Zweifel zu ziehen.

§. 5.

Doch ich komme nun zum Hauptzwecke, nämlich zur Feststellung der Moivreschen Formeln. Wir kehren deshalb zu den Formeln in I) und II) zurück. In I), in dem mit k multiplicirten Theile, behalten die Coefficienten aller Producte aus den verschiedenen p einerlei Grösse und Vorzeichen, wenn man sämmtliche a negativ nimmt. Da aber dadurch der Factor p_m aus $\cos a_m+\sqrt{k-1}.\sin a_m$ in $\cos a_m-\sqrt{k-1}.\sin a_m$ sich verwandelt, und dieses eben auch geschieht, wenn man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt, so ist es in der Gleichung I) einerlei, ob man alle a, oder ob man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt.

Denkt man sich nun in dem mit k multiplicirten Theile die Producte der p nach dem gewöhnlichen Multiplicationsgesetz aufgelöst, so werden sich sämmtliche Glieder in zwei Klassen abtheilen lassen, in solche, welche gerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ enthalten und folglich rational sind, und dann in solche, welche

ungerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ haben und folglich irrational bleiben. Indem man in der ersten Klasse die Potenzen von $k-1$ auflöst, erhält man eine Reihe $Ak+Bk^2+Ck^3,\ldots$, welche für ein gerades m (=Anzahl aller a) bis zu $k^{\frac{m}{2}}$ und für ein ungerades bis zu $k^{\frac{m-1}{2}}$ aufsteigt. Sondert man aus den Gliedern der zweiten Klasse den Factor $\sqrt{k-1}$, so behalten sie nur gerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ und geben daher eine Reihe $\sqrt{k-1}\,(A'k+B'k^2+C'k^3+\ldots)$, welche bis zu $k^{\frac{m}{2}-1}$ bei geradem und bis zu $k^{\frac{m-1}{2}}$ bei ungeradem m aufsteigt.

Man hat also

IX) $p_1p_2\ldots p_m=\cos(a_1+a_2+\ldots,a_m)+Ak+Bk^2+\ldots$
$+(\sin(a_1+a_2+\ldots a_m)+A'k+B'k^2+\ldots)\sqrt{k-1}$,

und es ist nicht weiter nöthig, dass man das Bildungsgesetz von $A, B\ldots A', B'\ldots$ kenne.

Nehmen wir nun zuerst alle a einander gleich, so werden auch alle p identisch, und man erhält

X) $p^m=(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots$
$+(\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots)\sqrt{k-1}$.

Wird aber die Quadratwurzel negativ genommen, oder nimmt man, was nach dem Vorigen dasselbe ist, a negativ, so wird:

$(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots$
$-(\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots)\sqrt{k-1}$.

Daraus folgt nun sogleich

XI)
$$\begin{cases}\dfrac{(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m+(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m}{2}\\ =\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots\\ \text{und}\\ \dfrac{(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m-(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m}{2\sqrt{k-1}}\\ =\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots\end{cases}$$

Man sieht nun deutlich, welche Vortheile man durch den Gebrauch des Imaginären hier erlangt, indem durch dasselbe alle Glieder, welche noch den Factor k haben, sogleich beseitigt werden. Hierfür kann man Folgendes bemerken. Das Product $p_1p_2p_3\ldots p_m$ lässt sich immer so entwickeln, dass man zwei Theile erhält, von denen der eine rational ist, der andere mit dem Factor $\sqrt{k-1}$ behaftet bleibt. Gelingt es nun, den beiden Theilen der Entwickelung verschiedene Formen zu geben, dass man also $P+Q\sqrt{k-1}$ das eine Mal und $P'+Q'\sqrt{k-1}$ das andere Mal erhält, so müssen wir schliessen, dass $P=P'$ und $Q=Q'$ sei. Denn wenn man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt, erhält man $P-Q\sqrt{k-1}=P'-Q'\sqrt{k-1}$, und wenn diese Gleichung mit der vorigen $P+Q\sqrt{k-1}=P'+Q'\sqrt{k-1}$ verbunden wird, so folgt sogleich $P=P'$, $Q=Q'$. Man kann also die Elimination von $\sqrt{k-1}$ ganz

umgehen und dafür sagen, dass in der Gleichung $P+Q\sqrt{k-1}=P'+Q'\sqrt{k-1}$ der rationale Theil nur dem rationalen, der irrationale nur dem irrationalen gleich sein könne.

Aber hierbei fällt sogleich in die Augen, dass die Betrachtung gar nicht an einen besondern Werth von k geknüpft und dass daher auch die Giltigkeit der Resultate nicht auf bestimmte Werthe von k beschränkt ist. Wer indessen im Anfange der Betrachtung durchaus nur reelle Werthe für $\sqrt{k-1}$ zulassen wollte, müsste dann überlegen, dass z. B. P und P' Functionen bloss von k und nicht mehr von $\sqrt{k-1}$ sind, die für $k\geq 1$ immer gleiche Werthe haben, und hieraus müsste die Gleichheit von P und P' auch in allen anderen Fällen nachgewiesen werden. Da dieses keine Schwierigkeiten hat, so will ich nicht länger dabei verweilen.

Die Gleichungen IX), X) und XI) gelten also auch für $k=0$, so dass, wenn nun $p_r=\cos a_r+i\sin a_r$ ist:

$$\text{XII)}\quad p_1p_2p_3\ldots p_m=\cos(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m)+i\sin(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m),$$

$$\text{XIII)}\quad (\cos a+i\sin a)^m=\cos ma+i\sin ma,$$

$$\text{XIV)}\quad \begin{cases}\cos ma=\dfrac{(\cos a+i\sin a)^m+(\cos a-i\sin a)^m}{2},\\ \sin ma=\dfrac{(\cos a+i\sin a)^m-(\cos a-i\sin a)^m}{2i};\end{cases}$$

und wenn man noch das Binom $(\cos a\pm i\sin a)^m$ auflöst:

$$\text{XV)}\quad \begin{cases}\cos ma=\cos a^m-m_2\cos a^{m-2}\sin a^2+m_4\cos a^{m-4}\sin a^4\ldots,\\ \sin ma=m_1\cos a^{m-1}\sin a-m_3\cos a^{m-3}\sin a^3+m_5\cos a^{m-5}\sin a^5\ldots\end{cases}$$

Alle diese Formeln sollen zunächst nur für ganze positive Werthe von m gelten, doch reichen sie noch für die goniometrische Darstellung der m Werthe von $\sqrt[m]{\pm 1}$ aus. Aus XIII) folgt nämlich, wenn man $\frac{a}{m}$ statt a setzt:

$$\cos\frac{a}{m}+i\sin\frac{a}{m}=(\cos a+i\sin a)^{\frac{1}{m}},$$

sofern man an diese Form noch keine andere Forderung stellt, als dass die Entwickelung ihrer $m$ten Potenz $=\cos a+i\sin a$ werden soll. Nimmt man nun $a=2\mu\pi$ oder $=(2\mu+1)\pi$, so wird $\cos a+i\sin a=+1$ oder $=-1$, und man hat

$$\text{XVI)}\quad \begin{cases}\sqrt[m]{+1}=\cos\dfrac{2\mu\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\mu\pi}{m},\\ \sqrt[m]{-1}=\cos\dfrac{2\mu\pi}{m}-i\sin\dfrac{2\mu\pi}{m}.\end{cases}$$

§. 6.

Ich komme nun zur Erörterung des Falles, wo in den Moivreschen Formeln der Exponent ein Bruch ist. Hier lassen sich nun zwar die Rechnungen mit dem allgemeineren Zeichen $\sqrt{k-1}$ fortführen; da indessen die Formeln IX) und X) des vorigen §. allgemein für jeden Werth von k gelten, so kann man der weitläufigeren Rechnung durch den Gebrauch des Imaginären überhoben sein. Hierbei darf man aber die daselbst gestellte Bemerkung nicht übersehen, dass, wenn für dieselbe Form zwei Entwickelungen $P+iQ$ und $P'+iQ'$ gefunden worden sind, $P=P'$ und $Q=Q'$ sein muss. Dieser Schluss ist unfehlbar, und mit ihm gleichbedeutend ist das Eliminationsverfahren durch eine zweite Gleichung, die man erhält, wenn man i negativ nimmt; aber man hat hier oft ein Eliminationsverfahren in Anwendung gebracht, das zwar beim ersten Anblick tadellos erscheint, aber demungeachtet sich als ein sehr gefahrvolles erweist.

Aus XIII) lässt sich auf eine leichte Weise folgern, dass

$$\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a=\sqrt[n]{(\cos a+i\sin a)^m}$$
$$=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}$$

sein muss. Da aber dieser Ausdruck wegen der Vieldeutigkeit der zu $\cos a$ und $\sin a$ gehörigen Bögen ein vieldeutiger ist, so pflegt man gewöhnlich die Vieldeutigkeit durch Hinzufügung des Factors $1^{\frac{m}{n}}$ zu erklären, ohne weitere Rücksicht darauf zu nehmen, dass es doch eines Beweises bedürfte, dass die Vieldeutigkeit jenes Ausdrucks durch den Factor $1^{\frac{m}{n}}$ wirklich dargestellt werde. Doch wenn wir auch hiervon absehen, so schloss man ferner auf die Gleichung

$$\cos\frac{m}{n}a-i\sin\frac{m}{n}a=(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}$$

von jener ersten dadurch, dass man a negativ nahm und meinte dann weiter die Gleichungen

$$2\cos\frac{m}{n}a=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}+(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}=u+v,$$

$$2i\sin\frac{m}{n}a=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}-(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}=u-v$$

begründet zu haben. Aber auf solche Art ist das Imaginäre nur bei Bögen des ersten Quadranten eliminirt; man muss bei grösseren Bögenwerthen die conjugirten Formeln $(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}$ und $(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}$ nicht dadurch aus einander herleiten, dass man a negativ nimmt, sondern man muss i negativ werden lassen, damit

auch das i in dem Factor $1^{\frac{m}{n}}$ an der Veränderung mit Theil nimmt. Dabei wird es denn freilich nothwendig, dass man vorher die Formel $\cos a \pm i \sin a$ auf Bögen des ersten Quadranten reducire. Statt dessen setzte man aber immer obiges $u+v$ satt $2\cos\frac{m}{n}a$ und $u-v$ statt $2i\sin\frac{m}{n}a$ und umgekehrt, ohne den bestimmten Ausdruck für die Vieldeutigkeit jener Formeln in Rechnung zu nehmen, verlor dadurch auch am Ende alle Vieldeutigkeit und hatte nur für Bögen des ersten Quadranten giltige Resultate. Aber, was noch schlimmer war, man nahm auf etwaige Factoren $=i$, die ausser dem i der Moivreschen Formeln in die Rechnung sich einschlichen, gar keine Rücksicht und eliminirte daher ganz falsch, erhielt folglich auch falsche Resultate, und während nun die früheren Mathematiker allen Scharfsinn aufboten, um den Irrthum zu finden, so haben viele Neuere dagegen die Schuld des Irrthumes dahin geschoben, wo alles weitere Ergründen aufhören musste, nämlich auf die Divergenz der Reihen. Darum geben sie sich auch nicht die Mühe nachzuweisen, wie die Divergenz der Reihen Ursache zu Fehlern wird, sondern glauben genug zu thun, wenn sie zeigen, dass man bei Vermeidung divergirender Reihen nichts Falsches, wenn auch nichts Allgemeines, erhält.

§. 7.

Aus dem im vorigen §. Gesagten geht zur Genüge hervor, dass man bei der Feststellung der Moivreschen Formeln für gebrochene Exponenten die Vieldeutigkeit der Wurzeln Anfangs ganz vermeiden muss. Es sei a ein (positiver oder negativer) Bogen des ersten Quadranten und $x=\cos a$, $y=\sin a$, so wird x immer eine positive Zahl sein. Man hat dann

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=(x+\sqrt{k-1}.y)^{\frac{m}{n}}$$
$$=x^{\frac{m}{n}}+\binom{\frac{m}{n}}{1}x^{\frac{m}{n}-1}y\sqrt{k-1}+\binom{\frac{m}{n}}{2}x^{\frac{m}{n}-2}y^2(k-1)$$
$$+\binom{\frac{m}{n}}{3}x^{\frac{m}{n}-3}y^3(k-1)^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

was wir mit $R+S\sqrt{k-1}$ bezeichnen können, so dass R und S nur noch von k, nicht aber von $\sqrt{k-1}$ abhängen. Man hat also

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=R+S\sqrt{k-1}.$$

Man setze $R=q\cos\varphi$ und $S=q\sin\varphi$, also $tg\,\varphi=\frac{S}{R}$, so wird $q=\sqrt{R^2+S^2}$. Daher

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=q(\cos\varphi+\sqrt{k-1}.\sin\varphi),$$

folglich

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m=q^n(\cos\varphi+\sqrt{k-1}.\sin\varphi)^n,$$

r nach §. 5:

$$\left.\begin{matrix}ma+Ak+Bk^2....\\ \sin ma+A'k+B'k^2....)\sqrt{k-1}\end{matrix}\right\}=q^n\left\{\begin{matrix}\cos n\varphi+\mathfrak{A}k+\mathfrak{B}k^2+....\\ +(\sin n\varphi+\mathfrak{A}'k+\mathfrak{B}'k^2\\ +....)\sqrt{k-1}\end{matrix}\right.$$

aus nun folgt:

$$\cos ma+Ak+Bk^2....=q^n(\cos n\varphi+\mathfrak{A}k+\mathfrak{B}k^2...),$$
$$\sin ma+A'k+B'k^2....=q^n(\sin n\varphi+\mathfrak{A}'k+\mathfrak{B}'k^2...).$$

Diese Gleichungen sind richtig für jedes $k\geqq 1$, sie sind daher alle Werthe von k richtig, und wenn man nun $k=0$ setzt, so et man:

$$\cos ma=q^n\cos n\varphi,\quad \sin ma=q^n\sin n\varphi.$$

Um den Werth von $q=\sqrt{R^2+S^2}$ für $k=0$ zu erhalten, mulicire man die Gleichung

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=R+S\sqrt{k-1}$$

$$(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=R-S\sqrt{k-1},$$

erhält man

$$(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}=R^2+S^2-S^2k.$$

Setzt man hier $k=0$, so folgt $q^2=R^2+S^2=1$, $q=1$, und lich $\cos ma=\cos n\varphi$, $\sin ma=\sin n\varphi$, daher

$$\varphi=\frac{m}{n}a.$$

Nimmt man nun die Werthe, in welche die Reihen R und S $k=0$ sich verwandeln, so erhält man:

$$\text{XVII)}\quad \cos\frac{m}{n}a=\cos a^{\frac{m}{n}}-\left(\frac{m}{n}\right)_2\cos a^{\frac{m}{n}-2}\sin a^2$$
$$+\left(\frac{m}{n}\right)_4\cos a^{\frac{m}{n}-4}\sin a^4...,$$
$$\sin\frac{m}{n}a=\left(\frac{m}{n}\right)_1\cos a^{\frac{m}{n}-1}\sin a-\left(\frac{m}{n}\right)_3\cos a^{\frac{m}{n}-3}\sin a^3$$
$$+\left(\frac{m}{n}\right)_5\cos a^{\frac{m}{n}-5}\sin a^5.....$$

Dieses gilt jedoch nur, wenn der Bogen a im ersten Quadranegt, wie man sich auf folgende Weise überzeugen kann. Aus

den Gleichungen $\cos ma = \cos n\varphi$ und $\sin ma = \sin n\varphi$ liesse sich allerdings $n\varphi = 2\mu\pi + ma$ folgern, wo μ eine ganze positive oder negative Zahl sein kann. Dieses gäbe $\varphi = \frac{2\mu\pi + ma}{n}$, so dass also die erste der obigen Reihen $= \cos\frac{2\mu\pi + ma}{n}$ wäre. Allein dieselbe kann nur einen von den in $\cos\frac{2\mu\pi + ma}{n}$ enthaltenen Werthen vorstellen, und da sie für $a = 0$ den Werth I hat, so muss auch $\cos\frac{2\mu\pi}{n} = 1$, und folglich $\mu = 0$ sein.

Daher giebt jene erste Reihe den $\cos\frac{m}{n}a$, wenn a spitz ist, und dann kann sie nicht zugleich zur Darstellung von $\cos\frac{m}{n}(2\mu\pi + a)$ dienen. Auch gilt sie nicht mehr für solche Werthe von a, für welche $\cos a$ negativ ist, weil die ganze Rechnung darauf ruht, dass $\cos a$ positiv sei.

§. 8.

Will man nun für die Vieldeutigkeit der Moivreschen Formeln bei gebrochenem Exponenten einen klaren Ausdruck erhalten, so wird man sämmtliche Wurzeln auf eine primitive zurückführen müssen. Es sei x die absolute Grösse des Cosinus eines Winkels A und y bedeute den (positiven oder negativen) Sinus desselben Winkels, so wollen wir die Zurückführung auf diejenige Wurzel des Binoms $(x + iy)^{\frac{m}{n}}$ machen, welche durch

$$x^{\frac{m}{n}} - \left(\frac{m}{n}\right)_1 x^{\frac{m}{n}-2} y^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^{\frac{m}{n}-4} y^4 - \ldots$$

$$+ i\left(\left(\frac{m}{n}\right)_1 x^{\frac{m}{n}-1} y - \left(\frac{m}{n}\right)_3 x^{\frac{m}{n}-3} y^3 + \ldots\right)$$

ausgedrückt wird, wenn man für die gebrochenen Potenzen $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}-1}$, u. s. w. nur ihre absoluten Werthe nimmt. Ist a der (positive oder negative) spitze Bogen, der zu x als Cosinus und zu y als Sinus gehört, so ist diese Wurzel nach §. 7. $= \cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a$.

Ferner ist klar, dass für jeden Werth von b

$$(\cos b + i\sin b)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}b + i\sin\frac{m}{n}b,$$

wenn man an den Ausdruck zur Linken nur die Forderung stellt, dass seine $n$te Potenz $= (\cos b + i\sin b)^m$ werden soll. Auch fällt

alle Vieldeutigkeit dieses Ausdruckes hinweg, wenn man nicht bloss die Werthe von $\cos b$ und $\sin b$ im Auge hat, sondern den Werth des Bogens b selbst als einen bestimmten voraussetzt. Denn dann würde zwar die $m$te Potenz von

$$\cos\frac{2\mu\pi+mb}{n}+i\sin\frac{2\mu\pi+mb}{n}$$

immer noch dieselben Werthe von $\cos b$ und $\sin b$, aber verschiedene Werthe von b liefern.

Nun hat man

$$\cos(b+a)+i\sin(b+a)=(\cos b+i\sin b)(\cos a+i\sin a),$$

und wenn man dieses zur Potenz vom Grade $\frac{m}{n}$ erhebt:

$$\text{XVIII)}\ (\cos(b+a)+i\sin(b+a))^{\frac{m}{n}}$$
$$=(\cos\frac{m}{n}b+i\sin\frac{m}{n}b)\ (\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}.$$

Ist aber hier a ein spitzer Bogen, dessen Cosinus $=x$ und dessen Sinus $=y$ ist, und nimmt man $b=2\mu\pi$, so wird zu $2\mu\pi+a$ doch noch x als Cosinus und y als Sinus gehören, und wenn man also $2\mu\pi+a$ mit A bezeichnet, so hat man:

$$\text{XIX)}\ (\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}=(\cos\frac{2m\mu\pi}{n}+i\sin\frac{2m\mu\pi}{n})(x+iy)^{\frac{m}{n}}.$$

So ist der Ausdruck zur Linken in XIX) im Allgemeinen n verschiedener Werthe fähig, so fern man nämlich nur die Werthe von $\cos A$ und $\sin A$, nicht aber zugleich auch den von A berücksichtigt. Geschieht das letztere, so verschwindet natürlich auch die Vieldeutigkeit, und man muss $\mu=0$, $=1$, $=2$, u. s. w. nehmen, je nachdem A im 4.0+1sten, 4.1+1sten, 4.2+1sten, u. s. w. Quadranten liegt. Diese Bemerkung ist für den Gebrauch der Formel XIX) nicht ohne Wichtigkeit.

Da aber $\cos\frac{2m\mu\pi}{n}+i\sin\frac{2m\mu\pi}{n}$ die n Werthe von $1^{\frac{m}{n}}$ vorstellt, so verwandelt sich der Ausdruck XIX) in

$$(\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}=1^{\frac{m}{n}}(x+y)^{\frac{m}{n}},$$

so dass die Vieldeutigkeit von $(\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}$ durch die n Werthe von $1^{\frac{m}{n}}$ wirklich dargestellt wird.

Und weil $(x+iy)^{\frac{m}{n}}=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a$, so verwandelt sich XIX) in

$$(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{2m\mu\pi + ma}{n} + i \sin \frac{2m\mu\pi + ma}{n}$$
$$= \cos \frac{m}{n} A + i \sin \frac{m}{n} A,$$

so dass also die allgemeine Giltigkeit der Moivreschen Formeln, die Manche in Zweifel gezogen haben, für diesen Fall gerechtfertigt ist.

Nimmt man nun hierin A oder i negativ, so erhält man

$$(\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n} A - i \sin \frac{m}{n} A,$$

und aus dieser Gleichung endlich mit der vorigen:

$$\cos \frac{m}{n} A = \frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2},$$

$$\sin \frac{m}{n} A = \frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2i};$$

und auch diese Formeln lassen sich noch rechtfertigen, wenn man nur eine solche Verbindung der Wurzeln nimmt, dass das Imaginäre sich hebt. *Sobald man also mit den Ausdrücken*

$$\frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2}$$

und $$\frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2}$$

die Bedingung verbindet oder verbinden muss, dass das Imaginäre sich heben soll, so wird man auch den ersten $= \cos ma$, den andern $= \sin ma$ zu setzen haben. *Aber man darf nicht glauben, dass diese Bedingung immer mit jenen Ausdrücken zu verbinden sei*; dieselben sind vielmehr die Stellvertreter noch einer anderen imaginären Form, und wenn uns der Verlauf einer Rechnung auf sie hinführt, so müssen wir uns hüthen, die genannte Bedingung mit ihnen voreilig zu verbinden. Nur wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, oder wenn bei gebrochenem Werthe von $\frac{m}{n}$ der Bogen a im ersten Quadranten liegt, ist der erste jener Ausdrücke allemal unbedingt $= \cos \frac{m}{n} a$, der andere $= \sin \frac{m}{n} a$, denn dann ist mit den

oben genannten Urwerthen von $(\cos A \pm i \sin A)^{\frac{m}{n}}$ kein anderer Werth von $1^{\frac{m}{n}}$ zu verbinden als die 1.

Die Gleichung XIX) gilt aber nur, wenn $\cos A$ eine positive Grösse ist. Ist $\cos A$ negativ, so wird A im 3ten, 7ten, 11ten, u. s. w. positiven oder negativen Quadranten liegen. Man nehme dann in XVIII) $b = (2\mu+1)\pi$ und setze $(2\mu+1)\pi + a = A$, so wird immer $\cos A = -x$ und $\sin A = -y$ sein, und man erhält:

$$\text{XX)} \quad (\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}}$$

$$= (\cos \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} + i \sin \frac{m(2\mu+1)\pi}{n}) (x+iy)^{\frac{m}{n}},$$

wo nun $\mu = 0, = 1, = 2$, u. s. w. zu nehmen ist, je nachdem A im $4.0+3$, $4.1+3$, $4.2+3$, u. s. w. Quadranten liegt. Man sieht also, dass wenn die Zurückführung auf die oben bezeichnete Urwurzel von $(x+iy)^{\frac{m}{n}}$ gemacht werden soll, die Verschiedenheit aller n Werthe von $(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}}$ durch den Factor $\cos \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} + i \sin \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} = (-1)^{\frac{m}{n}}$ dargestellt wird. Auch folgt auf gleiche Weise wie oben

$$\cos \frac{m}{n} A + i \sin \frac{m}{n} A = (\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}},$$

und zugleich erhellet auch, dass die Ausdrücke

$$\frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2} = \tfrac{1}{2} U^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2} V^{\frac{m}{n}}$$

$$\text{und} \quad \frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2i} = \frac{1}{2i} U^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2i} V^{\frac{m}{n}}$$

nichts anderes als $\cos \frac{m}{n} a$ und $\sin \frac{m}{n} a$ bedeuten, wenn noch die Bedingung hinzugedacht wird, dass in den Wurzelverbindungen das Imaginäre sich heben soll. Ohne diese Bedingung aber giebt es jetzt, wo $\cos A$ negativ ist, ausser für ganze Werthe von $\frac{m}{n}$, keinen Fall, wo man jene Ausdrücke unbedingt mit $\cos \frac{m}{n} a$ und $\sin \frac{m}{n} a$ zu vertauschen sich erlauben dürfte.

Es ist jetzt nur noch nöthig, dass ich die imaginäre Bedeutung der Ausdrücke $\frac{1}{2} U^{\frac{m}{n}} + \frac{1}{2} V^{\frac{m}{n}}$ und $\frac{1}{2i} U^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2i} V^{\frac{m}{n}}$ angebe. Zu dem Ende bezeichne man $(\pm 1)^{\frac{m}{n}}$ durch $\eta + i\vartheta$, so hat man

$$U^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(x+iy)^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(\cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a).$$

Wird aber der Bogen A negativ genommen, so wird auch y negativ, und es verwandelt sich U in V. Daher

$$V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(x-iy)^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)(\cos\frac{m}{n}a - i\sin\frac{m}{n}a).$$

Daher

$$\tfrac{1}{2}U^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2}V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\cos\frac{m}{n}a,$$

$$\tfrac{1}{2i}U^{\frac{m}{n}} - \tfrac{1}{2i}V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\sin\frac{m}{n}a.$$

§. 9.

Ueber die Moivreschen Formeln mit negativem Exponenten ist nur wenig zu sagen übrig. Die Betrachtung lässt sich auch hier mit der allgemeineren Grösse $\sqrt{k-1}$ statt des i beginnen und, man erhält zuletzt ähnliche Resultate, wie bei positiven Exponenten. Denn wenn zuerst m eine ganze Zahl ist, so hat man

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-m} = \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}{(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^m(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}$$

$$= \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}{(1-k\sin a^2)^m},$$

welches sich nach §. 5. in

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-m}$$

$$= \left\{\begin{matrix} \cos ma + Ak + Bk^2 + \ldots. \\ -(\sin ma + A'k + B'k^2 + \ldots.)\sqrt{k-1} \end{matrix}\right\} : (1-k\sin a^2)^m$$

verwandelt, woraus sich alsbald alles Weitere ergiebt.

Ist aber der Exponent ein Bruch $= \frac{m}{n}$, so hat man

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}.$$

Hier lassen wir nun den Bogen a zuerst im ersten Quadranten liegen und lösen $(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-\frac{m}{n}}$ auf in

$$\cos a^{-\frac{m}{n}} + \left(-\frac{m}{n}\right)_2 \cos a^{-\frac{m}{n}-2}\sin a^2.(k-1) + \ldots.$$

$$\left\{\left(-\frac{m}{n}\right)_1 \cos a^{-\frac{m}{n}-1} \sin a \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{m}{n}\right)_3 \cos a^{-\frac{m}{n}-3} \sin a^3 . (k-1 \ldots . \right\} \sqrt{k-1}$$
$$= R' + S' \sqrt{k-1}.$$

Nach §. 7. lässt sich aber $(\cos a - \sqrt{k-1} . \sin a)^{\frac{m}{n}}$ in $R - S\sqrt{k-1}$ verwandeln, so dass man also

$$R' = \frac{R}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}, \quad S' = \frac{-S}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}$$

hält. Daher für $k=0$

$$R' = R = \cos\frac{m}{n}a = \cos\left(-\frac{m}{n}a\right),$$

$$S' = -S = -\sin\frac{m}{n}a = \sin\left(-\frac{m}{n}a\right).$$

Man sieht hieraus, dass die Reihen in XV) für jeden Werth m gelten, wenn der positive oder negative Bogen a nur im ten Quadranten liegt.

Bei $(\cos A + i \sin A)^{-\frac{m}{n}}$ muss man ebenfalls die Reduction auf Binom $(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$ machen, wo x die absolute Grösse von A und $y = \sin A$ ist. Man wird da

$$(\cos A + i \sin A)^{-\frac{m}{n}} = (\cos\frac{2m\mu\pi}{n} - i\sin\frac{2m\mu\pi}{n})(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$$

wenn $\cos A$ positiv ist, und

$$(\cos A + i \sin A)^{-\frac{m}{n}}$$
$$= (\cos\frac{(2\mu+1)m\pi}{n} - i\sin\frac{(2\mu+1)m\pi}{n})(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$$

wenn $\cos A$ negativ ist, erhalten. Unter $(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$ ist diejenige Wurzel zu verstehen, welche durch

$$x^{-\frac{m}{n}} - \left(-\frac{m}{n}\right)_2 x^{-\frac{m}{n}-2} y^2 + \left(-\frac{m}{n}\right)_4 x^{-\frac{m}{n}-4} y^4 \ldots .$$
$$+ i\left[\left(-\frac{m}{n}\right)_1 x^{-\frac{m}{n}-1} y - \left(-\frac{m}{n}\right)_3 x^{-\frac{m}{n}-3} y^3 + \ldots .\right]$$

bestimmt wird, indem man für $x^{-\frac{m}{n}}$, $x^{-\frac{m}{n}-1}$, u. s. w. nur die

absoluten Zahlenwerthe setzt. Hieraus ist aber klar, dass die Ausdrücke XIX) und XX) auch für negative Werthe von $\frac{m}{n}$ gelten.

§. 10.

Zuletzt will ich noch die Anwendung der bisherigen Theorie an einem Beispiele zeigen, und zu dem Ende die berüchtigte Reihe

$$U = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a \ldots.$$

wählen, welche Euler als die Entwickelung von $2^n \cos a^n$ gefunden hatte und die nach ihm für alle Werthe von n und a gelten sollte. Aber Poisson entdeckte nachher, dass diese Reihe für $n = \frac{1}{2}$ und $x = \pi$ nicht mehr richtig sei, und seitdem ist sehr viel über diese Sache verhandelt worden. Mir scheint in der hier gegebenen Theorie die allereinfachste Auflösung der Verwickelung zu liegen. Es sei n überhaupt ein positiver oder negativer Bruch $\frac{p}{q}$ und zuerst $\cos a$ positiv. Der spitze Bogenwerth zu $\cos a$ sei φ, so ist allgemein, wenn k eine ganze Zahl bedeutet:

$$\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)a$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi + i \sin\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi\right](\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi - i\sin\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi\right](\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{2p\mu\pi}{q} + i\sin\frac{2p\mu\pi}{q}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{2p\mu\pi}{q} - i\sin\frac{2p\mu\pi}{q}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}.$$

Hier setzen wir zur Abkürzung

$$\cos\frac{2p\mu\pi}{q} \pm i\sin\frac{2p\mu\pi}{q} = \binom{R}{R'},$$

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = \binom{P}{P'};$$

und erhalten

$$\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)a = RP^{\frac{p}{q} - 2k} + R'P'^{\frac{p}{q} - 2k}.$$

Dadurch verwandelt sich die Reihe

$$U = \cos\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q} - 2\right)a + \left(\frac{p}{q}\right)_2 \cos\left(\frac{p}{q} - 4\right)a + \ldots$$

$$U=\tfrac{1}{2}R\,(P^{\frac{p}{q}}+\left(\frac{p}{q}\right)_1 P^{\frac{p}{q}-2}+\left(\frac{p}{q}\right)_2 P^{\frac{p}{q}-4}+\ldots.)$$
$$+\tfrac{1}{2}R'\,(P'^{\frac{p}{q}}+\left(\frac{p}{q}\right)_1 P'^{\frac{p}{q}-2}+\left(\frac{p}{q}\right)_2 P'^{\frac{p}{q}-4}+\ldots.)$$
$$=\tfrac{1}{2}R(P+\tfrac{1}{P})^{\frac{p}{q}}+\tfrac{1}{2}R'\,(P'+\tfrac{1}{P'})^{\frac{p}{q}}.$$

Aber man hat

$$P+\tfrac{1}{P}=\cos\varphi+i\sin\varphi+\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}$$
$$=\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos\varphi-i\sin\varphi=2\cos\varphi,$$

eben so

$$P'+\tfrac{1}{P'}=2\cos\varphi.$$

Unsere Reihe wird also

$$U=\tfrac{1}{2}R(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}+\tfrac{1}{2}R'\,(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}=\tfrac{1}{2}(R+R')\,2^{\frac{p}{q}}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}},$$

$$\text{d. h. } U=\cos\frac{2p\mu\pi}{q}\cdot 2^{\frac{p}{q}}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}.$$

Daher ist allgemein

$$\text{XXI)}\quad 2^{\frac{p}{q}}\cos\frac{2p\mu\pi}{q}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$
$$=\cos\frac{p}{q}a+\left(\frac{p}{q}\right)_1\cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a+\left(\frac{p}{q}\right)_2\cos\left(\frac{p}{q}-4\right)a+\ldots.$$

dabei ist $\cos\varphi=\cos a$, und man muss nach §. 8. $\mu=0, =1, =2$ u. s. w. setzen, je nachdem a im 1sten, 5ten, 9ten, u. s. w. Quadranten liegt. Ist $q=1$, also $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl n, so wird $\frac{2p\mu\pi}{q}=1$, und man erhält die gemeine Reihe

$$2^n\cos a^n=\cos na+n_1\cos(n-2)a+n_2\cos(n-4)a+\ldots.,$$

für positive und negative ganze n allgemein gilt.
Ist nun zum Zweiten cos a negativ, so wird man setzen müssen

$$\cos(\frac{p}{q}-2k)a$$
$$=[\cos(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)\pi+i\sin(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)a](\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$
$$[\cos(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)\pi-i\sin(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)a](\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q} + i\sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q} - i\sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k},$$

unter φ immer denjenigen spitzen Bogen verstanden, der zu $\cos a$ als blosser Zahl gehört. Dadurch erhält man auf gleiche Weise wie vorhin:

$$\text{XXII)}\quad 2^{\frac{p}{q}}\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$
$$= \cos\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1\cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a + \left(\frac{p}{q}\right)_2\cos\left(\frac{p}{q}-4\right)a + \ldots.$$

und man muss $\mu=0$, $=1$, $=2$, u. s. w. nehmen, je nachdem a im 3ten, 7ten, 11ten, u. s. w. Quadranten liegt. Unter $2^{\frac{p}{q}}$ und $(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ sind immer nur absolute Zahlen zu verstehen.

Nehmen wir nun hier mit Poisson $\frac{p}{q}=\frac{1}{3}$, $a=\pi$, so ist $\cos\varphi = 1$, und man erhält, weil $a=\pi$ im 3ten Quadranten liegt und folglich $\mu=0$ ist:

$$2^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).1^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(1+\left(\tfrac{1}{3}\right)_1+\left(\tfrac{1}{3}\right)_2+\ldots.\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(1+1)^{\frac{1}{3}},$$

welches nun nicht mehr unrichtig ist.

Wird in XXII) $q=1$ genommen, so erhält man abermals die gewöhnliche Reihe. Denn $\cos\varphi^{\frac{p}{q}}$ wird der Grösse nach doch immer $= \cos a^{\frac{p}{q}}$, aber $= +\cos a^{\frac{p}{q}}$ bei geradem und $= -\cos a^{\frac{p}{q}}$ bei ungeradem Exponenten. Dagegen wird $\cos\frac{p}{q}(2\mu+1)\pi = -1$ bei ungeradem und $= +1$ bei geradem $\frac{p}{q}$; daher der Werth von XXII) immer $= 2^{\frac{p}{q}}\cos a^{\frac{p}{q}}$.

Hätte ich aber anfangs

$$\cos\left(\frac{p}{q}-2k\right)a = \tfrac{1}{2}(\cos a + i\sin a)^{\frac{p}{q}-2k}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\cos a - i\sin a)^{\frac{p}{q}-2k}$$

gesetzt und mit diesem Ausdrucke die Rechnung gemacht, ohne mich weiter um die Vieldeutigkeit der Wurzeln zu kümmern, so hätte ich ein nur für Werthe von a im ersten Quadranten passendes Resultat erhalten, eben weil jene Voraussetzung nur für solche Werthe von a passt.

Indessen ist die Formel

$$2^n \cos a^n = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a \ldots .$$

anfangs, wenn ich nicht irre, auf einem anderen Wege gefunden worden, bei welchem man die klare Uebersicht über die Rechnung verlor. Man setzte

$$u = \cos a + i \sin a,$$
$$v = \cos a - i \sin a,$$

so dass $2\cos a = u + v$ wird. Dadurch erhielt man

$$2^n \cos a^n = (u+v)^n = u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots .,$$

welches sich, weil $uv = 1$ ist, in

$$2^n \cos a^n = u^n + n_1 u^{n-2} + n_2 u^{n-4} + \ldots .$$

verwandelt. Weil es aber einerlei ist, ob man $u+v$ oder $v+u$ schreibt, so hat man auf gleiche Weise

$$2^n \cos a^n = v^n + n_1 v^{n-2} + n_2 v^{n-4} + \ldots .,$$

und wenn man beide Reihen für $2^n \cos a^n$ addirt:

$$2^n \cos a^n = \frac{v^n + u^n}{2} + n_1 \left(\frac{v^{n-2} + u^{n-2}}{2}\right) + n_2 \left(\frac{v^{n-4} + u^{n-4}}{2}\right) + \ldots .$$

Bis hierher ist die Rechnung ohne Tadel und der Ausdruck für jeden Werth von n und a richtig. Nun setzte man aber

$$\frac{u^n + v^n}{2} = \frac{(\cos a + i \sin a)^n + (\cos a - i \sin a)^n}{2} = \cos na,$$

und beging hier die Unvorsichtigkeit. Wenn n eine ganze positive oder negative Zahl ist, so kann man nur $\cos na$ statt $\frac{u^n + v^n}{2}$ setzen, desgleichen auch nur, wenn bei gebrochenem n der Bogen a im ersten Quadranten liegt. Aber wenn im letzteren Falle a den ersten Quadranten überschreitet, so kann man noch etwas Anderes für $\frac{u^n + v^n}{2}$ setzen, und womit will man denn beweisen, dass gerade hier in $\frac{u^n + v^n}{2}$ das Imaginäre bei aller Vieldeutigkeit der Wurzeln sich heben müsse (§. 8.). Hiermit aber hat der Streit alle Bedeutung verloren und die analytische Allgemeinheit der Binomialreihe ist auch hier gerechtfertigt.

Doch ich fürchte, dass dieser Aufsatz schon zu lang geworden und schliesse für dies Mal mit folgenden Bemerkungen. Hat man sich denn in diesem Streite wirklich gefragt, was man unter dem Ausdrucke $2^n \cos a^n$ bei gebrochenen Exponenten denken wolle? Wollte man die verschiedenen Werthe von $\cos a^n$ bei gebrochenem n darstellen, so entsprach die Rechnung der Voraussetzung nicht. Setzen wir $\frac{p}{q}$ statt n und bezeichnen $(\pm 1)^{\frac{p}{q}}$ durch $\eta + i\vartheta$. Sei fer-

ner φ der zu $\cos a$ als Zahl gehörige spitze Bogenwerth, so ist $u^{\frac{p}{q}-2k} = (\eta + i\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$, und wir haben $2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$. Nehmen wir aber a negativ, so wird auch $\sin\varphi$ negativ und man findet

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$$

und wenn man nun beide Reihen addirt, so erhält man, da, wegen des spitzen Werthes von φ, $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}}$ nichts anderes als $\cos\frac{p}{q}\varphi$ sein kann:

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[\cos\frac{p}{q}\varphi + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q} - 2\right)\varphi + \ldots\right],$$

welches eben nichts weiter sagt, als

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = 2^{\frac{p}{q}}(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}.$$

War der Sinn der oben angegebene, so durfte das Imaginäre aus der Reihe nicht verschwinden.

Wollte man aber die Ausdrücke in XXI) und XXII) erhalten, so hätte man bedenken müssen, dass in $(\cos a)^{\frac{p}{q}}$ selbst noch das Imaginäre steckt, das man aber ganz unberücksichtigt liess und somit gegen den Sinn von i verstiess (§. 5. u. §. 6.), das man fälschlich für eliminirt hielt. Man hätte dann statt der eben angeführten Gleichung

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$$

vielmehr

$$2^{\frac{p}{q}}(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$$

setzen sollen. Wird hier i negativ genommen, so findet sich

$$2^{\frac{p}{q}}(\eta - i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}} = (\eta - i\vartheta)\left[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots\right]$$

und indem man nun beide Reihen addirt, erhält man, da nach §. 8. $(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + (\eta - i\vartheta)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}}$ nichts anders als $2\cos\frac{p}{q}a$ ist,

$$2^{\frac{p}{q}}\eta(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a + \ldots,$$

welches die Ausdrücke in XXI) und XXII) darstellt. Subtrahirt man dieselben Reihen, so erhält man noch

XXIII)
$$2^{\frac{p}{q}}\vartheta(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$
$$= \sin\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \sin\left(\frac{p}{q}-2\right)a + \left(\frac{p}{q}\right)_2 \sin\left(\frac{p}{q}-4\right)a + \ldots,$$

wo nun $\vartheta = \sin\frac{2\mu p\pi}{q}$ oder $= \sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}$ gesetzt werden muss, je nachdem $\cos a$ positiv oder negativ ist.

III.

Ueber eine gewisse Gattung von Aufgaben für Prüfungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Unter den mathematischen Aufgaben, welche sowohl hier als anderwärts zum Gebrauch für Schulen vorgelegt werden, vermisse ich eine gewisse Gattung, die mir namentlich zum Behufe von schriftlichen Prüfungen besondere Vorzüge zu besitzen scheint. Es ist bekannt, wie wenig solche Aufgaben dem Zwecke der Prüfungen entsprechen, deren Lösung einen besonderen Kunstgriff, einen glücklichen Einfall erfordert, bei dessen Aufsuchung die Schüler vielleicht Stunden zubringen können, ohne ihn dennoch zu finden. So darf man z. B., wenn man etwa bei einer Abiturienten-Prüfung den Ptolemäischen Lehrsatz zum Beweisen vorlegt, — vorausgesetzt, dass dieser im Laufe des Unterrichts selbst nicht vorgekommen ist, — zuverlässig erwarten, dass kaum Einer auf die dazu nöthige Hülfslinie verfallen wird, so dass mithin allen denen, welche sich vergebens darüber abgemühet haben (und diese pflegen gerade die besseren zu sein), die Gelegenheit, den wirk-

lichen Bestand ihrer Kenntnisse zu zeigen, abgeschnitten ist. Von der anderen Seite können aber auch diejenigen Aufgaben dem Zwecke der Prüfungen nur theilweise genügen, welche im Laufe des Unterrichts wirklich vorgekommen sind; denn hier wird die Lösung zu sehr Gedächtnisssache, und kann zu keinem Urtheil über die gewonnenen Fähigkeiten des Schülers führen.

Von beiden Uebelständen frei scheint mir diejenige Gattung von Aufgaben zu sein, welche ich hiermit in Anregung bringen will. Das Charakteristische dieser Aufgaben besteht darin, dass in ihnen der Zusammenhang zwischen zwei als veränderlich angesehenen Grössen aus einer dem Schüler bekannten Sphäre gegeben, und dabei gefordert wird, während die eine dieser beiden Grössen alle Werthe innerhalb eines gewissen Intervalls durchläuft, die zugehörigen Werthe der andern Grösse anzugeben. Die Lösung dieser Aufgaben erfordert keine besondere Erfindungsgabe von Seiten des Schülers, und dennoch verlangt sie mehr als eine todte Wiederholung vorgetragener Lehren; sie eignet sich demnach in gleicher Weise für den fähigen, wie für den schwachen Schüler, und liefert deshalb auch den besten Massstab zu einer vergleichenden Beurtheilung beider. Ich will einige Aufgaben hersetzen, die sich für schriftliche Abiturienten-Prüfungen eignen möchten, zu welchem Zwecke ich sie theilweise bereits angewandt habe. Dass sie nicht zu leicht sind, darüber glaube ich die Erfahrung aller denkenden Lehrer für mich zu haben. Die Zahl derselben wird jeder Lehrer ohne Mühe vermehren können.

1. Anzugeben, welche Werthe die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2-7x+m=0$ successiv durchlaufen, wenn man m alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen lässt.

2. In derselben Gleichung alle (positiven und negativen) Werthe anzugeben, welche m durchlaufen darf, damit die Wurzeln der Gleichung nicht imaginär werden.

Eine dieser beiden Aufgaben möchte völlig hinreichen, um sich darüber zu versichern, wie ein Schüler die Theorie der quadratischen Gleichungen verstanden hat. Dasselbe gilt von der folgenden dritten Aufgabe in Bezug auf die Begriffe der trigonometrischen Functionen.

3. Anzugeben, welche Werthe der Winkel ψ in der Formel $\operatorname{tang}\psi=1+\sin\alpha-\cos\alpha$ allmälig durchläuft, wenn man α allmälig alle Werthe von 0^0 bis 360^0 durchlaufen lässt.

4. Anzugeben, was aus den übrigen Bestandtheilen eines Dreiecks wird, wenn man eine Seite und einen ihr anliegenden Winkel ungeändert beibehält, aber den gegenüberliegenden Winkel alle Werthe durchlaufen lässt, deren er fähig ist.

Diese Aufgabe, der sich noch viele andere zur Seite stellen lassen, kann sowohl zu geometrischer als zu trigonometrischer Behandlung vorgelegt werden.

5. Anzugeben, für welche Werthe von x der Ausdruck $\log \frac{1+x}{1-x}$ im briggischen Systeme successiv die Werthe 0, 1, 2, 3.... bis ∞, sowie -1, -2, -3.... bis $-\infty$ annimmt.

Auch physikalische Aufgaben lassen sich so behandeln, z. B.

6. Die Lage des Spiegelbildes von einem gegebenen Objecte in einem sphärischen Convexspiegel anzugeben, bei allen möglichen Entfernungen vom Spiegel, die das Object successiv annehmen kann.

Ich füge hinzu, dass sich diesen Aufgaben, wenn man sie in Unterricht selbst hineinziehen will, bequem die Betrachtung Maximis und Minimis anknüpfen lässt, und darf sie schliesallen Lehrern zum Versuche empfehlen.

IV.

ochmalige Einreden gegen Herrn Doctor Schlömilch.

Von dem

Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.

---

§. 1.

In dem Aufsatze, in welchem ich die Moivre'schen Formeln festzustellen bemüht bin, habe ich zwar die Erklärung abgegeben, dass ich den Weg der Streitschriften verlassen und dagegen die wichtigsten Momente der analytischen Theorien lieber unabhängig von zufälligen Einreden anderer in einem mehr geordneten Vortrage erläutern wollte; allein die beiden, von Herrn Dr. Schlömilch gegen mich gerichteten Aufsätze in Theil V. Heft 4. dieses Archives sind durchaus von der Art, dass ein gänzliches Schweigen nicht stattfinden kann. Denn abgesehen von allen Persönlichkeiten, so lassen sich in jenen Aufsätzen doch einige Bemerkungen herholen, welche

für die Beleuchtung der Theorie nicht ohne Wichtigkeit sind. Ich habe mich über Herrn Dr. Schlömilch's Einreden in der That sehr gefreut, um so mehr, als im Eingange Hoffnung vorhanden schien, dass ein Einverständniss bald möglich sein werde; als ich aber diejenigen Ideen, welche die Seele der ganzen Analysis ausmachen: syntaktische Bedeutungen als Hinterthüren, Einheit der Formen als unglückliche Einbildungen bezeichnet sah, da musste ich die gefasste Hoffnung alsbald wieder aufgeben.

Dass ich diesen Streit um die Methode der unbestimmten Coefficienten und die divergirenden Reihen selbstständig und im Interesse der Wissenschaft unternommen habe und dabei kein blinder Nachbeter bin, wie mir Herr Dr. Schlömilch vorwirft, glaube ich genugsam bewiesen zu haben. Steht denn hier Herr Dr. Schlömilch auf seinen Füssen? Dass ich bei meinen Bestrebungen nicht irren könnte, habe ich nie behauptet, aber ich kann von jedem Anhänger der neueren Theorie dieselbe Ruhe und Würde im Vortrage verlangen, die der verehrte Herr Herausgeber dieses Archives für meine Ansichten zur Bedingung macht. Denselben gebührt hier in der That die grösste Hochachtung und Anerkennung, indem er, obschon gegenwärtig den neueren Ansichten sich zuneigend, dennoch seinem Archive nicht bloss eine einseitige und eben desshalb für die Wissenschaft verderbliche Richtung geben mag. Daher kann ich auch nicht glauben, dass er etwa bloss aus dem Grunde der Vertheidigung der älteren Ansichten hinderlich in den Weg treten werde, weil Herr Dr. Schlömilch alle Discussionen hierüber so lange zu verschieben bittet bis seine kritischen Werke erschienen sind *). Ich bin der Meinung, dass auch ich kritisire, und habe eben begonnen, meine Ansichten in diesem Archive zur Beurtheilung vorzulegen, und wie nun, wenn ich meinen Gegner bäte, alle Discussionen, ja die Herausgabe seiner Werke, so lange einzustellen, bis meine Erörterungen vollständig abgedruckt sind.

Doch ich will nun zur Sache kommen.

---

*) Für dergleichen mich persönlich betreffende wohlmeinende Aeusserungen meiner geehrten Herrn Mitarbeiter bin ich denselben, wie sich von selbst versteht, jederzeit zu dem grössten Danke verpflichtet, und dieselben müssen, wenn ich nicht ganz die menschliche Natur verleugnen will, natürlich wohlthuend für mich sein. Aus einem in meinem Innersten begründeten eigenthümlichen Gefühl, welches es mir über und jederzeit wünschenswerth macht, so wenig als nur irgend möglich von mir selbst zu reden und reden zu lassen, habe ich dergleichen Stellen bisher in den Aufsätzen jedoch immer gestrichen, wenn es sich irgend thun liess. In dem vorliegenden Falle ging dies indess, ohne den Sinn und den ganzen Zusammenhang wesentlich zu beeinträchtigen, nicht gut an, weshalb die obige mich persönlich betreffende Stelle stehen bleiben müssen. — Ich habe bei der Herausgabe des Archivs lediglich die Absicht, der Sache zu nützen, und bin, auch ohne dass es öffentlich ausgesprochen wird, überzeugt, dass alle diejenigen, welche es mit der Sache wahrhaft wohl meinen, mir ihre Anerkennung für mein redlich gemeintes Streben nicht ganz versagen werden.

G.

§. 2.

Herr Dr. Schlömilch bespricht zuerst meinen Gegenaufsatz Nr. XXV. in Theil IV. dieses Archives und verwirft ganz und gar meine Ansichten (ich bitte die Leser, es nicht übel zu deuten, wenn ich manchmal von einer fremden Erfindung als von der meinigen rede) über die Methode der unbestimmten Coefficienten. Auch ich habe damals einiges Unrecht gehabt, aber nur in so fern, als ich den Gegnern viel zu viel zugab. Die Ansicht, dass die Form der Reihe vorher nothwendig begründet sein müsse, ist durchaus ohne Grund, die frühere Meinung, dass es sich von selbst schon herausstellen werde, ob die Form der Reihe passend gewählt worden sei, ist schlechterdings richtig, und nur einige übel verstandene Beispiele, welche eigentlich mit der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie dieselbe gewöhnlich aufgefasst wird, gar nichts gemein haben, sind die Schuld der von mir hinzugefügten Beschränkung. Eine gründliche genetische Erklärung der analytischen Reihe, welche ich in einem der nächsten Aufsätze versuchen werde, wird hier alle Zweifel lösen. Eine solche ist meines Wissens noch nie gegeben worden und die älteren Mathematiker haben das Richtige oft mehr gefühlt, als klar gedacht. Daher rühren aber auch manche bodenlose Erklärungsversuche.

Was Herr Dr. Schlömilch in der Theorie der unbestimmten Coefficienten gegen mich auszusetzen hat, erklärt er zum Theil selbst für blosse Caprice, theils ist ihm die Sache noch nicht klar, oder er hat meine Worte übel gedeutet. Ich fragte früher, wo wohl der Erklärungsgrund herzunehmen sei, dass für zwei verschiedene Functionen dieselbe in allen ihren Theilen bestimmte Reihe gefunden werden könne. Darauf antwortet mir Herr Doctor Schlömilch, es sei die Reihe

$$1-1+1-1+\ldots.$$

nicht nur die Entwickelung von

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots.,$$

sondern auch von

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}=1-x^2+x^3-x^5+\ldots.$$

und allgemein von

$$\frac{1+x+x^2+\ldots.+x^{m-1}}{1+x+x^2+\ldots.+x^{n-1}}$$
$$=1-x^m+x^n-x^{m+1}+x^{2n}-x^{m+2n}+\ldots.$$

für $x=1$, und darum sei ja $1-1+1-1+\ldots$, etwas ganz Unbestimmtes $=\frac{m}{n}$. Hier liesse uns auch La Grange im Stiche. — Ich überlasse es nun dem Publikum, zu beurtheilen, ob dieses auf meine Erörterung passt. Die Erklärung von La Grange ist freilich nur aus der Luft gegriffen, ich aber mache die Hinterthür auf und flüchte mich zur analytischen Bedeutung der Reihe.

Was uns Herr Dr. Schlömilch hier sagt, ist uns läng
kannt, aber wir meinen keine divergirende Reihe, die wir
das Papier schreiben und mit einer gewissen Selbstgefäl
ansehen, sondern eine Reihe mit syntaktischer Bedeutung
wenn nun die Reihe $1-1+1-1+\ldots$ die syntaktische B
tung von $1-x+x^2-x^3+\ldots$ hat, so ist ihre Summe =
keine andere. Man muss es Herrn Dr Schlömilch Dank
sen, dass er diese Sache schon jetzt angeregt hat; bei mein
langsam vorwärts schreitenden Arbeiten wäre sie viel spät
Sprache gekommen. Da aber hierdurch eben ein grosses
über die Frage verbreitet wird, so entschloss ich mich zu
ausgabe dieses Aufsatzes.

Herr Dr. Schlömilch hätte nur etwas weiter gehen
um die grosse Schönheit in der allgemeinen Theorie der R
zu begreifen, gegen die er mit diesem Argumente zu Felde
Er würde dann gefunden haben, dass sie kein leeres Spi
sondern weit reichere Früchte tragen könne, als die Reihent
mit der gegenwärtigen Beschränkung.

§. 3.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern und um zu
über den von Herrn Dr. Schlömilch angeregten Zweif
gehörige Rechenschaft zu geben, wähle ich ein Beispiel au
mathematischen Lexicon (Bd. V. Abth. I. Art. Umformung). Da
wird die convergirende Reihe

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\ldots$$

so umgeformt, dass sie convergenter wird. Da

$$a+nb=a+b+(n-1)b=a+2b+(n-2)b=a+3b+(n-$$

u. s. w.,

so folgt leicht

$$\frac{1}{a+nb}=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+nb)}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+b)}+\frac{nb\cdot(n-1)b}{a(a+b)(a+nb)}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+b)}+\frac{nb\cdot(n-1)b}{a(a+b)(a+2b)}-\frac{nb\cdot(n-1)b\cdot(n-2)b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b}$$

$$\pm\frac{nb\cdot(n-1)b\ldots.2b\cdot b}{a(a+b)(a+2b)\ldots.(a+nb)}.$$

Wird nun in der Reihe S statt jedes Gliedes seine Auf
nach diesem Gesetz substituirt, so erhält man leicht

$$S=\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a+b)}$$

$$+\frac{1}{a}-\frac{2b}{a(a+b)}+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}$$
$$-\frac{1}{a}+\frac{3b}{a(a+b)}-\frac{2b.3b}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}$$

u. s. w.

er

$$S=\frac{1}{a}(1-1+1-1+\ldots.)$$
$$+\frac{b}{a(a+b)}(1-2+3-4+5-\ldots.)$$
$$+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1-3+6-10+\ldots.)$$
$$+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4+10-\ldots.)$$

u. s. w.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist nun

$$1-1+1-1+\ldots.=\tfrac{1}{2},$$
$$1-2+3-4+\ldots.=\tfrac{1}{4},$$
$$1-3+6-10+\ldots.=\tfrac{1}{8},$$

u. s. w.

Daher

$$S=\tfrac{1}{2}.\frac{1}{a}+\tfrac{1}{4}.\frac{b}{a(a+b)}+\tfrac{1}{8}.\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}$$
$$+\frac{1}{16}.\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}+\ldots.$$

Was nun Herr Dr. Schlömilch gegen diese Rechnung einenden wird, ist leicht zu sehen, aber die Richtigkeit des Resultates wird er nicht läugnen können. Aber eben diese Richkeit des Resultates hat doch wohl Gewicht genug, um nicht e divergirenden Reihen für puren Unsinn zu erklären.

Die Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ hat in obiger Rechnung allerings keine bestimmte syntaktische Bedeutung und daher auch eine bestimmte Summe. Ist das die Meinung des Herrn Doctor Schlömilch, so sind wir alle einig mit ihm. Weil aber eben ese Reihe keine syntaktische Bedeutung hat, so legte der Urheer dieser Rechnung eine solche hinein, indem er ihr die Bedeung von $x-x^2+x^3-x^4+\ldots.$ gab, so dass $1-1+1-\ldots.=\frac{1}{2}$ rd. Aber eben dadurch gab er auch allen übrigen eihen ihre syntaktischen Bedeutungen und hat dieselben treu bewahrt, so dass die ganze Rechnung richtig werden usste. Denn indem er der Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ die Bedeu-

tung von $x-x^2+x^3-x^4+\ldots.$ gab, ging er eigentlich von der speciellen Reihe

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}\ldots.$$

zu der allgemeineren

$$U=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a+b}+\frac{x^3}{a+2b}-\frac{x^4}{a+3b}\ldots.$$

über, deren Summe ganz nach demselben Verfahren so gefunden wird:

$$U=\frac{1}{a}(1-x+x^2-x^3+\ldots.)x$$
$$+\frac{b}{a(a+b)}(1-2x+3x^2-4x^3\ldots.)x^2$$
$$+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1-3x+6x^2-10x^3\ldots.)x^3$$
$$+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4x+10x^2\ldots.)x^4$$
u. s. w.,

d. h. nämlich

$$U=\frac{1}{a}.\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{b}{a(a+b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\ldots.$$

woraus zugleich hervorgeht, dass die umgeformte Reihe selbst dann noch brauchbar ist, wenn die Urreihe schon divergirt. Also dadurch, dass der Urheber dieser Rechnung $1-1+1-\ldots.=\frac{1}{2}$ setzte, entstand die Nothwendigkeit $1-2+3-4+\ldots.=\frac{1}{3}$, $1-3+6-10+\ldots.=\frac{1}{8}$ zu nehmen. Dies mag sich Herr Dr. Schlömilch überlegen, um die Hinterthür zu begreifen, welche in der syntaktischen Bedeutung liegt.

Aber derselbe wird sagen, ja wenn ich nun der Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ die syntaktische Bedeutung von $1-x^2+x^3-x^5+\ldots.=\frac{1+x}{1+x+x^2}$ gegeben und sie $=\frac{2}{3}$ genommen hätte? Das hätte ganz frei gestanden, denn dadurch hätten nun auch die übrigen Reihen eine ganz andere Bedeutung erhalten, $1-2+3-4+\ldots.$ die von $1-2x^2+3x^3-4x^5+\ldots.$ u. s. w., indem dann ein Aufsteigen von der besonderen Reihe S zu der allgemeineren

$$V=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a+b}+\frac{x^3}{a+2b}-\frac{x^5}{a+3b}\ldots.$$

statt gefunden hätte. Man hätte dann zwar eine ganz andere Umbildung von S erhalten, aber dieselbe muss immer noch den Werth von S haben. Die Reihe S kann ein specieller Fall von

ch vielen verschiedenen Functionen sein, so wie auch jede
n unzähligen Functionsformen enthalten sein kann. Man
, wie unendlich viel aus dieser Theorie fliessen kann:
umbildungen der verschiedensten Art, bestimmte Integrale
.

so nicht die Convergenz entscheidet über den Werth einer
sondern allgemeiner die syntaktische Bedeutung, und wo
ese in der Gewalt hat, ist jene ein unnützer Zusatz. Keine
e Reihe hat aber an sich eine syntaktische Bedeutung,
e nun con- oder divergiren, sondern diese Bedeutung
sie erst durch eine gewisse Nothwendigkeit der Rech-
oder sie wird, wie im vorigen Beispiele, willkührlich
etragen. Die convergirende specielle Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}\ldots.$$

n specieller Fall von

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7\ldots$$

n

$$\cos x-\tfrac{1}{3}\cos 3x+\tfrac{1}{5}\cos 5x\ldots.$$

n unzähligen anderen Reihen sein, obschon sie immer nur
immten Zahl $\frac{\pi}{4}$ gleich ist.

ermit darf man aber die Fälle nicht verwechseln, wo, wie
nal geschieht, der Werth einer Reihe in derselben
ktischen Bedeutung zweifelhaft wird. Die Rech-
it solchen Reihen wird dann nur einseitige Resultate lie-
enn sie nicht mit Rücksicht auf den Complex aller Werthe
wird, wie ich dies bereits schon nachgewiesen habe. Doch
smal genug hiervon.

§. 4.

lbst die einfachsten analytischen Theorien können gefähr-
erden, wenn man nicht die gehörige Vorsicht gebraucht.
ergehe das, was Herr Dr. Schlömilch in seiner ersten
schrift (Thl. V. Nr. XXX.) weiter vorträgt, weil man dem ver-
Herrn Herausgeber unmöglich zumuthen kann, den Raum
tzlosem Gezänk zu verschwenden. Ich unterlasse es auch,
orschlag näher zu prüfen, wornach Herr Dr. Schlömilch
vergirende Reihen nicht das Gleichheitszeichen gebrauchen,
n dafür lieber das astronomische Zeichen des niedersitzen-
n Knotens schreiben will. Er erkennt damit doch wenig-
eine Beziehung zwischen Urform und Reihe an, wenn
die Art, wie er die Beziehung aufzufassen scheint, die
ndung aller möglichen Reihen mit jeder beliebigen Grösse
ttet. Aber einen Punkt kann ich nicht mit Stillschweigen
ehen, die Philosophie nämlich, mit welcher Herr Dr. Schlö-
h für den Ausdruck $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^n}$, und insbesondere auch für
$\frac{dx}{1-x^2}$ einen reellen Werth erzwingen will.

Das allgemeine Integral $\int f(x).dx$ ist diejenige Function $F(x)$ von x, deren Differential $= f(x)$ wird; das bestimmte Integral $\int_a^b f(x).dx$ ist dann $= F(b) - F(a)$.

Unter dieser Ansicht habe ich $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ für einen arithmetischen Unsinn erklärt, weil es den Logarithmen einer negativen Zahl enthält und also imaginär wird. So ist z. B. $\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, was von $x=0$ bis $x=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log(-1)$ giebt. Hier lehrt mich nun Herr Doctor Schlömilch den imaginären Logarithmen reell zu machen; es sei nämlich $\log(-1) = \frac{1}{2}\log(-1)^2 = \frac{1}{2}\log 1 = 0$, und daher $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Dieses ist ein wahres Universalmittel, das Unmögliche möglich zu machen. Ich weiss nun, dass die Wurzel $1+\sqrt{-1}$ der Gleichung $x^3 - 2x + 2 = 0$ nicht imaginär ist, denn ich habe $\sqrt{-1} = \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.

Herr Doctor Schlömilch giebt sich viel Mühe, von seinem kritisch-philosophischen Standpunkte aus das Imaginäre in obigen Formeln weg zu disputiren und findet den Grund aller unserer Irrungen in der unglücklichen Idee von der Einheit der Form. Wir haben diese Idee für eine nothwendige in der mathematischen Analysis gehalten, ohne welche letztere gar nicht denkbar ist. Wir haben geglaubt, dass dieser Idee alle allgemeineren Algorithmen ihre Entstehung verdanken, dass aus ihr die Lehre von den entgegengesetzten Grössen hervorging, dass in ihr die imaginären Grössen ihren Grund haben; nun aber müssen wir diese Lieblingsidee aufgeben und auf die kritischen Werke des Herrn Dr. Schlömilch warten!

Wissen Sie, Herr Doctor Schlömilch, dass nimmermehr unbedingt $\log(-a) = \frac{1}{2}\log(-a)^2$ ist, sondern es enthält $\log(-a)$ nur den einen imaginären Werth von $\frac{1}{2}\log(-a)^2$, statt dessen Sie nun den reellen nehmen, wie es eben Ihre Kritik erfordert. Dadurch erzwingen Sie eine Formel, deren klares Verständniss Sie zugleich verlieren. Die Analysis fragt nichts nach Ihrer Formel

$$\int_a^b f(x).dx = \delta\,[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+(n-1)\delta)],$$

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

und es ist dieselbe nicht einerlei mit obigem $F(b) - F(a)$, nicht einmal in allen Fällen, wo das allgemeine Integral $\int f(x).dx$ immer reell ist. Es sei $y = \frac{b^3}{(a-x)^2}$ die Gleichung einer Curve mit

echtwinklichen Coordinaten, so ist das Differential der Fläche $ds =$
$dx = \frac{b^3 dx}{(a-x)^2}$, also $s = \frac{b^3}{a-x} +$ Const. Dieses giebt von $x = 0$ bis
$= 2a$ den Werth $-\frac{b^3}{2a}$, während obige Näherungsformel *) auf das
nendliche führt.

Doch ich enthalte mich jetzt des Weiteren und bemerke nur
ch, dass die Analysis nicht bald $1-x$ bald $x-1$ machen darf,
n einen Logarithmus, der sich unter der Rechnung als unmög-
ch ergiebt, reell zu machen. Auch darf sie nicht statt einer
orm A eine andere B setzen, die mehrdeutig ist als A, und sich
nn aus B einen Werth nach Gefallen auslesen.

§. 5.

Doch dieser Streit bezog sich zunächst nur auf die Art,
ach welcher Herr Dr. Schlömilch die Integration durch
ine Reihe mit der Formel $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = 0$ verglich. Nach seiner
rt, die Sache zu betrachten, giebt auch die divergirende Reihe
ch das richtige Resultat, weil eben $\log(-1) = 0$ ist. Mit sol-
er Kritik will man uns also den Gebrauch der divergirenden
eihen nehmen! will man uns nöthigen, bogenlange Rechnungen
n lesen, die wir mit ein Paar Zeilen abmachen können. Die
Wissenschaft mag auf der Huth sein, dass sie die Uebersicht
er sich nicht verlieren lässt. Will man eine Theorie widerlegen,
reicht es nicht hin, Exempel auf Exempel zu häufen, die
an nach Principien erklären will, welche die Theorie selbst
falsch zurückweist. Herr Dr. Schlömilch wird dann auch
rstehen, dass eine Summe unendlich vieler Glieder und eine
ntwickelung im Allgemeinen sehr verschiedene Dinge sind und
dann die Kraftlosigkeit vieler seiner Waffen von selbst fühlen, mit
nen er die Theorie bekämpfen will. Er wird dann vielleicht auch
einen Satz von der Convergenz der entwickelten Reihe, d. h.
rer, welche ich als die Entwickelung einer Function kenne, dann

*) Hier muss ich mir, wenn auch gegen mein sonst stets befolg-
Princip, doch einmal eine Bemerkung zu machen erlauben, da
ch meiner Ansicht die obige, für die ganze Analysis höchst wichtige
rmel (oder vielmehr Gleichung) durchaus keine blosse Näherungs-
rmel, sondern vielmehr eine ganz genaue, in völliger Strenge gel-
nde Gleichung ist, wenn man nur, wie es eine strenge Behandlung
r Analysis erfordert, das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ als die Gränze
rachtet, welcher die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheits-
chens sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst, also δ in's Unend-
che abnimmt. Ich mache diese Bemerkung hier namentlich und eigent-
h zunächst bloss deshalb, weil ich mir vorgenommen habe, den wich-
en Gebrauch der obigen Gleichung bei verschiedenen Untersuchungen,
n dieselben mit völliger Strenge geführt werden sollen, in einigen
einen gelegentlichen Aufsätzen unter den Miscellen nachzuweisen.
s übrigens auch meine Abhandlung Thl. II. Nr. XXV. S. 275.

G.

nicht so sinnlos finden. — Die Reihe convergirt, wenn ihre Summe, im arithmetischen Verstande, dem Werthe der Function, woraus sie entwickelt wurde, sich mehr und mehr nähert, je mehr man Glieder nimmt. Fassen wir das in der Totalität zusammen, so lässt sich sagen: die Reihe convergirt, wenn die Summe ihrer unendlich vielen Glieder dem Werthe der Function, woraus sie entwickelt wurde, gleich ist. Dieses findet immer dann statt, wenn die Glieder der Reihe bis zum Verschwinden klein werden, wie Herr Doctor Schlömilch an dem bestimmten Integrale, das er zum Gegenbeweis anführen will, beispielsweise hätte sehen können. Und der Satz scheint so lange zu bestehen, als man nicht verhindern kann, dass eine Function in gewissen Fällen unendlich werde.

Doch es ist nicht abzusehen, wozu die längere Unterredung führen könnte. Denn was sollen wir sagen, wenn uns ein Mathematiker eine philosophisch-kritische Bearbeitung der Analysis verspricht, und im Voraus bemerkt, dass das Unendliche eine Auflösung der Gleichung $f(m)f(n)=f(m+n)$ sei? Oder wenn er uns die Reellität von $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ dadurch begreiflich machen will, dass logarithmische Integrale durch den Werth einer gewissen Constante imaginär werden, obschon sie reell sind. Hier müssen wir jedesfalls die näheren Erläuterungen erwarten, die uns Herr Dr. Schlömilch von seinem kritisch-philosophischen Standpunkte aus geben will; einstweilen wollen wir uns nur vorbehalten, die Dinge nach unserer Weise betrachten zu dürfen.

V.

Ueber das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^m x\, dx$.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

So viel man sich mit dem Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin x\, dx$$

und den daraus entspringenden analytischen Betrachtungen beschäftigt hat, so wenig Aufmerksamkeit scheint man dem allgemeineren Integrale

$$\int_0^x e^{-ax} \sin^m x\, dx \ldots\ldots (1)$$

henkt zu haben, obgleich dasselbe bei verschiedenen analyti-n Untersuchungen vorkommt. Es möge daher in diesen Zei-sin kleiner Beitrag zu einer Theorie desselben folgen, der sich ssen auf den Fall beschränkt, dass m eine positive ganze Zahl ist.

I.

Wendet man die bekannte Reduktionsformel

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int du \int v\,dx$$

das Integral (1) für $u = \sin^m x$, $v = e^{-ax}$ an, so erhält man

$$\text{in}^m x\, e^{-ax}\,dx = \sin^m x \int e^{-ax}\,dx - m\int \sin^{m-1} x \cos x\,dx \int e^{-ax}\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^m x\, e^{-ax} + \frac{m}{a}\int \sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}\,dx \ldots (2)$$

Benutzt man die genannte Reduktionsformel noch einmal für auf der rechten Seite vorkommende Integral, indem man

$$u = \sin^{m-1} x \cos x,\quad v = e^{-ax}$$

t, so ist

$$\int \sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}\,dx = \sin^{m-1} x \cos x \int e^{-ax}\,dx$$

$$-\int [(m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x - \sin^m x]\,dx \int e^{-ax}\,dx;$$

r, wenn man bemerkt, dass $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ist:

$$\int \sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}\,dx = \sin^{m-1} x \cos x \int e^{-ax}\,dx$$

$$-\int [(m-1)\sin^{m-2} x - m \sin^m x]\,dx \int e^{-ax}\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}$$

$$+\frac{m-1}{a}\int \sin^{m-2} x\, e^{-ax}\,dx - \frac{m}{a}\int \sin^m x\, e^{-ax}\,dx.$$

Substituiren wir diess in die Gleichung (2), so wird

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\sin^m x\, e^{-ax} - \frac{m}{a^2}\sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}$$

$$+\frac{m(m-1)}{a^2}\int \sin^{m-2} x\, e^{-ax}\,dx - \frac{m^2}{a^2}\int \sin^m x e^{-ax}\,dx,$$

wenn wir hier das Integral

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

als Unbekannte ansehen und algebraisch bestimmen, so erha
ten wir

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

$$= -\frac{a\sin x + m\cos x}{a^2+m^2}\sin^{m-1}x\, e^{-ax} + \frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\int \sin^{m-2}x\, e^{-ax}\, dx$$

Diese Reduktionsformel führt unser Integral auf ein andere zurück, in welchem der Exponent von $\sin x$ um 2 erniedrigt is Gehen wir zur Gränze für wachsende und ebenso zu der für al nehmende x über, so ist im ersten Falle

$$\mathrm{Lim}\, e^{-ax} = 0,$$

sobald a positiv bleibt, und im zweiten, wegen $m > 1$,

$$\mathrm{Lim}\, \sin^{m-1}x = 0,$$

folglich

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx = \frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\int_0^\infty \sin^{m-2}x\, e^{-ax}\, dx.$$

Mit Hülfe dieser Reduktionsformel kann man für jedes gan positive m den Werth des Integrales auf der linken Seite finde Durch mehrmalige Anwendung derselben ergiebt sich nämlic wenn $2p$ eine gerade Zahl bezeichnet,

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx =$$

$$\frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\cdot\frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2}\cdots\frac{(m-2p+2)(m-2p+1)}{a^2+(m-2p+2)^2}\int_0^\infty \sin^{m-2p}x\, e^{-ax}\, dx$$

Ist nun m gerade, so kann man $2p = m$ nehmen, wodurch d letzte Integral in

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx$$

übergeht, dessen Werth bekanntlich $\frac{1}{a}$ ist. Man hat dann

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

$$= \frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\cdot\frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2}\cdot\cdots\cdot\frac{2.1}{a^2+2^2}\cdot\frac{1}{a}$$

oder

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx = \frac{1.2.3.4.\ldots.(m-1)m}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)\ldots.(a^2+m^2)}\Big\{\ldots.$$

Ist aber m ungerade, so kann man $2p=m-1$ nehmen, wodurch das letzte Integral

$$=\int_0^\infty \sin x\, e^{-ax}dx=\frac{1}{a^2+1^2}$$

wird. Es ist in diesem Falle

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\,dx$$
$$=\frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\cdot\frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2}\cdot\cdots\cdot\frac{3.2}{a^2+3^2}\cdot\frac{1}{a^2+1^2}$$

oder

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}dx=\frac{1.2.3.4.\ldots.(m-1)m}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)\ldots.(a^2+m^2)}\cdot\ldots\quad(4)$$

Man kann die Werthe unseres Integrales auch noch auf einem ganz anderen Wege finden. Man hat nämlich für jedes gerade m:

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\sin^m x=m_0\cos mx-m_1\cos(m-2)x+m_2\cos(m-4)x-\ldots..$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{m}{2}-1}\cos 2x+(-1)^{\frac{m}{2}}\tfrac{1}{2}m_{\frac{m}{2}},$$

wobei m_1, m_2, etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten m bedeuten. Multiplizirt man diese Gleichung mit

$$e^{-ax}dx$$

und integrirt zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, so ist

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\,dx$$
$$=m_0\int_0^\infty \cos mx\, e^{-ax}\,dx-m_1\int_0^\infty \cos(m-2)x\, e^{-ax}\,dx+\ldots.$$
$$+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{m}{2}-1}\int_0^\infty \cos 2x\, e^{-ax}\,dx+(-1)^{\frac{m}{2}}\tfrac{1}{2}m_{\frac{m}{2}}\int_0^\infty e^{-ax}dx,$$

wenn man den Werth jedes Integrales nach der allgemeinen Formel

$$\int_0^\infty \cos bx\, e^{-ax}\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}$$

bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}dx\\ &= \frac{m_0 a}{a^2+m^2} - \frac{m_1 a}{a^2+(m-2)^2} + \frac{m_2 a}{a^2+(m-4)^2} - \ldots\\ &\quad + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1}\, a}{a^2+2^2} + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} m_{\frac{1}{2}m}}{2a}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots$$

womit der Werth des Integrales für gerade m gefunden ist.

Für ungerade m hat man bekanntlich

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\sin^m x = m_0 \sin mx - m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x - \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)} \sin x,$$

mithin durch Multiplikation mit

$$e^{-ax}dx$$

und Integration zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}dx$$
$$= m_0\int_0^\infty \sin mx e^{-ax}dx - m_1\int_0^\infty \sin(m-2)x e^{-ax}dx + \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)}\int_0^\infty \sin x e^{-ax}dx;$$

oder, wenn man die einzelnen Integrationen rechts nach der meinen Formel

$$\int_0^\infty \sin bx\, e^{-ax}dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

ausführt:

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x e^{-ax}\,dx\\ &= \frac{m_0 m}{a^2+m^2} - \frac{m_1(m-2)}{a^2+(m-2)^2} \quad \frac{m_2(m-4)}{a^2+(m-4)^2} - \ldots\ldots\\ &\quad \ldots + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)}\cdot 1}{a^2+1^2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots$$

womit der Werth des Integrales für jedes ungerade m den ist.

Multiplizirt man die Gleichung (3) mit $(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}$, ebenso

$\frac{m-1}{2}$ 2^{m-1} und vergleicht sie darauf mit den Resultaten unter. id (6), so erhält man folgende zwei rein algebraische Rela-: für jedes gerade m:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}.1.2.3.\ldots\ldots m}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)\ldots\ldots(a^2+m^2)}\\ &=\frac{m_0 a}{a^2+m^2}-\frac{m_1 a}{a^2+(m-2)^2}+\frac{m_2 a}{a^2+(m-4)^2}-\ldots\ldots\\ &\quad+\frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{1}{2}m-1}a}{a^2+2^2}+\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}m_{\frac{1}{2}m}}{2a}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(7)$$

ür jedes ungerade m:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots m}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)\ldots\ldots(a^2+m^2)}\\ &=\frac{m_0 m}{a^2+m^2}-\frac{m_1(m-2)}{a^2+(m-2)^2}+\frac{m_2(m-4)}{a^2+(m-4)^2}-\ldots\ldots\\ &\quad+\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}m_{\frac{1}{2}(m-1)}.1}{a^2+1^2}.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(8)\ *)$$

II.

Wir wollen nun noch einige Anwendungen der gefundenen For-mittheilen.
lat man Gleichungen von folgender Form:

$$\varphi(x)=A_0+A_2\sin^2x+A_4\sin^4x+\ldots.,$$
$$\psi(x)=A_1\sin x+A_3\sin^3x+A_5\sin^5x+\ldots.$$

gelten dieselben für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\infty$, ann man dieselben auch mit $e^{-ax}dx$ multipliziren und chen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$ integriren, so dass man eue Gleichung erhält:

$$\int_0^\infty\varphi(x)\,e^{-ax}dx$$
$$\int_0^\infty e^{-ax}dx+A_2\int_0^\infty\sin^2xe^{-ax}dx+A_4\int_0^\infty\sin^4xe^{-ax}dx+\ldots.$$

$$\int_0^\infty\psi(x)\,e^{-ax}\,dx$$
$$\int_0^\infty\sin xe^{-ax}dx+A_3\int_0^\infty\sin^3xe^{-ax}dx+A_5\int_0^\infty\sin^5xe^{-ax}dx+\ldots$$

*) Liessen sich diese beiden Sätze wohl auch auf elementarem beweisen?

Hier lassen sich die Werthe sämmtlicher Integrale auf der jedesmaligen rechten Seite mit Hülfe der Formeln (3) und (4) angeben, und hierdurch gelangt man zur Kenntniss eines bestimmten Integrales, wenn man die Integration auf der linken Seite sonst nicht zu bewerkstelligen weiss, dagegen zur Kenntniss einer Reihensumme, wenn man auf anderem Wege den Werth des Integrales links in geschlossener Form angeben kann. Z. B. Aus der für jedes beliebige x und gerade m geltenden Gleichung

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \ldots$$

folgt durch Anwendung des obigen Prinzips der Multiplikation mit $e^{-ax}dx$ und Integration zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$:

$$\int_0^\infty \cos mx\, e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}dx - \frac{m^2}{1.2}\int_0^\infty \sin^2 x\, e^{-ax}\,dx + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\int_0^\infty \sin^4 x e^{-ax} dx - \ldots.$$

d. i.

$$\frac{a}{a^2+m^2} = \frac{1}{a} - \frac{m^2}{1.2}\cdot\frac{1.2}{a(a^2+2^2)} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.2.3.4}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)} - \ldots.;$$

oder wenn man beide Seiten mit a multiplizirt, von 1 abzieht und mit m^2 dividirt:

$$\frac{1}{a^2+m^2} = \frac{1}{a^2+2^2} - \frac{m^2-2^2}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)} + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)} - \ldots. \quad (9)$$

gültig für jedes gerade $m>0$.

Wendet man das nämliche Verfahren auf die für jedes ungerade m geltende Gleichung

$$\sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots.$$

an, so erhält man ähnlich:

$$\frac{1}{a^2+m^2} = \frac{1}{a^2+1^2} - \frac{m^2-1^2}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)} - \ldots \quad (10)^*)$$

für jedes ungerade m.

*) Könnte man diese Sätze auch algebraisch beweisen?

Auch von den Formeln (7) und (8) lassen sich einige bemerkenswerthe Anwendungen machen. Man schreibe nämlich in (7) x für a, multiplizire mit $\sin\gamma x\,dx$ und integrire zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, so ist, $1.2.3....m$ kurz mit m' bezeichnet:

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}m'\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x\,dx}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)....(x^2+m^2)}$$
$$=m_0\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+m^2}dx-m_1\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+(m-2)^2}dx+....$$
$$+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{1}{2}m-1}\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+2^2}dx+(-1)^{\frac{m}{2}}m_{\frac{1}{2}m}\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{2x}dx,$$

woraus man unter Anwendung der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x+k^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\gamma k}$$

die für jedes gerade m geltende Gleichung erhält:

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}m'\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x\,dx}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)....(x^2+m^2)}\\ =\frac{\pi}{2}\left\{\begin{array}{l}m_0e^{-m\gamma}-m_1e^{-(m-2)\gamma}+m_2e^{-(m-4)\gamma}-...\\ ....+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{1}{2}m-1}e^{-2\gamma}+(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}m_{\frac{1}{2}m}\end{array}\right\}\end{array}\right\} ..... (11)$$

Setzt man ebenso in der Gleichung (8) x für a, multiplizirt mit $\cos\gamma x\,dx$, integrirt zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$ und bringt rechts die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\gamma x}{x^2+k^2}dx=\frac{\pi}{2k}e^{-\gamma k}$$

für $k=m$, $m-2$, $m-4$, ... 3, 1 in Anwendung, so erhält man eben so leicht für jedes ungerade m:

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}m'\int_0^\infty \frac{\cos\gamma x\,dx}{(x^2+1^2)(x^2+3^2)....(x^2+m^2)}\\ =\frac{\pi}{2}\left\{\begin{array}{l}m_0e^{-m\gamma}-m_1e^{-(m-2)\gamma}+m_2e^{-(m-4)\gamma}-....\\ ....+(-1)^{\frac{m-1}{2}}m_{\frac{1}{2}(m-1)}e^{-\gamma}\end{array}\right\}\end{array}\right\} ... (12)$$

welche Gleichung das Correlat zu der (11)ten bildet.

VI.

Ueber das von Herrn Clausen auf S. 279. Theil V. Heft 2. angegebene Theorem.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Der Satz, dass die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.$$
$$=\frac{3}{n+3}, \frac{2}{n+3}, 0, -\frac{1}{n+3}, 0, \frac{2}{n+3}$$

ist, je nachdem n der Form

$$6\nu,\ 6\nu+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

angehört, ist nur ein spezieller Fall eines bereits bekannten allgemeineren Theoremes.

Man hat nämlich für jedes ganze positive m

$$2\cos mx=(2\cos x)^m-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos x)^{m-4}$$
$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos x)^{m-6}+\ldots.$$

Daraus folgt für $x=\frac{\pi}{3}$:

$$2\cos\frac{m\pi}{3}=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-3)}{1.2}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}+\ldots.$$

oder

$$\frac{1-2\cos\frac{m\pi}{3}}{m}=1-\frac{m-3}{2}+\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}-\ldots$$

Setzt man noch $m=n+3$, so wird $\cos\frac{m\pi}{3}=\cos(\frac{n\pi}{3}+\pi)$ $=-\cos\frac{n\pi}{3}$, folglich

$$\frac{1}{n+3}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$=1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots,$$

aus man sogleich das Clausen'sche Theorem erhält, wenn der Reihe nach $n=6v$, $6v+1$, 2, 3, 4, 5 nimmt, worin v eine ne positive Zahl bedeutet.

Ein ganz ähnliches Theorem lässt sich aus der Gleichung

$$\frac{\sin mx}{\sin x}$$
$$=(2\cos x)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\cos x)^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos x)^{m-5}-\ldots$$

leiten. Setzt man hier $x=\frac{\pi}{3}$ und $m=n+2$, so wird

$$\frac{\sin\frac{n+2}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}=1-\frac{n}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}+\ldots$$

aus ergiebt sich, dass die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}+\ldots.$$
$$=+1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ +1$$

je nachdem n unter der Form

$$6v,\ 6v+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

t, worin v eine ganze positive Zahl bedeutet.

VII.

Ueber die Construction der Normalen, Tangenten und Krümmungshalbmesser an solchen Curven, welche durch einen Punkt beschrieben werden, der mit zwei andern nach einem gegebenen Gesetze sich bewegenden Punkten fest verbunden ist.

Von dem

Herrn Professor Doctor Stegmann

an der Universität zu Marburg.

In dem Journal „L'Institut" fanden sich in den letzten Nummern des vorigen Jahrganges, nämlich Nr. 573 und Nr. 574, zwei kurze Berichte über eine von Herrn Abel Transon ersonnene und der Société philomatique zu Paris in den Sitzungen vom 30. November und 14. December 1844 vorgetragene Methode zur Bestimmung der Krümmungshalbmesser bei solchen Curven, welche entstanden sind (oder angesehen werden können als entstanden) durch Bewegung eines Punkts, der mit zwei andern sich auf gegebenen Curven bewegenden Punkten fix verbunden ist. Diese Methode ist nicht allein an und für sich so sinnreich und ihre Anwendung in den geeigneten Fällen so förderlich und die andern bekannten Mittel übertreffend, sondern auch ein Paar Lehrsätze, auf welche sie gestützt ist, sind so interessant, dass es zu bedauern sein würde, wenn in Deutschland die Aufmerksamkeit der Geometer sich nicht darauf hingerichtet hätte. Zugleich aber sind die Andeutungen, welche das genannte Journal darüber macht, so kurz und die Beweise so unterdrückt, dass man nicht leicht [illegible] den ersten Blick das Ganze zu durchschauen vermag. Aus dies Gründen erscheint vielleicht die Mittheilung der folgenden Be[illegible] beitung dieses Gegenstandes nicht unnütz.

§. 1.

Wir nehmen an, ein System von Punkten, welche in einer ene liegen und eine unveränderliche Lage gegen einander behal- n sollen, also sämmtlich als Punkte einer ebenen Figur gedacht rden können, bewege sich in seiner Ebene nach irgend einem esetze. Sind dabei die Linien bekannt, in welchen zwei der genommenen Punkte fortzurücken genöthigt sind, so werden sich enbar auch alle andern Linien, die von den übrigen Punkten schrieben werden, vollkommen bestimmen lassen, weil jeder itte Punkt des Systems, sobald man ihn mit den beiden zuerst dachten Punkten verbindet, in jedem Augenblicke die dritte cke eines gegebenen, unveränderlichen Triangels bildet. Wenn, n eines besonderen Falls zu gedenken, zwei von den angenom- enen Punkten auf parallelen Geraden fortrücken sollen, was gen des unveränderlichen Abstands jener Punkte nur geschehen nn, in so fern ihre Bewegung nach einerlei und nicht etwa in ntgegengesetzter Richtung vor sich geht, so wird augenscheinlich der andere Punkt des Systems sich ebenfalls in einer geraden nd mit den beiden ersten Geraden parallelen Linie fortbewegen. etzen wir diesen besondern Fall jedoch bei Seite, eben weil ine einzige Curve dabei in Betracht kommt, so sind nur drei Fälle möglich: nämlich entweder bewegt sich kein einziger Punkt les Systems in einer Geraden, oder nur ein Punkt, oder endlich s bewegen sich zwei Punkte in zwei convergenten Geraden und lle übrigen Punkte in krummen Linien (Vgl. §. 10.).

§. 2.

Man kann nun für jeden Augenblick der Bewegung die Diffe- nzialien der von den einzelnen Punkten beschriebenen Curven ls Elemente von Kreisbogen auffassen, welche sämmtlich von em und demselben Centrum O aus beschrieben werden, also die Bewegung des ganzen Systems als eine Summe unzähliger, auf einander folgender, unendlich kleiner Rotationen um einen successiv fortrückenden Mittel- punkt O.

Seien nämlich in Taf. I. Fig. 1. die Curven $A\alpha$, $B\beta$ die Wege, welche von den zwei Punkten A und B durchlaufen werden, wäh- rend das von den vier Punkten A, B, C, D gebildete System sich nach einem gegebenen Gesetze fortbewegt, so zwar, dass während A nach A' hinrückt, die Punkte B, C, D beziehungs- weise nach B', C', D' gelangen werden. Wenn nun AO und BO A und B auf den Curven $A\alpha$ und $B\beta$ normal stehen und wenn man in Gedanken den Bogen AA' in den Zustand des unendlichen Verschwindens versetzt, so wird auch BB' unendlich klein werden, und beide Curvenelemente AA' und BB' können sowohl als Ele- mente der Tangenten AT und BT, wie auch als Elemente von Kreisen gedacht werden, deren Mittelpunkte in der Normale AO beziehungsweise BO liegen. Aber freilich, da der Punkt B' auf der Curve $B\beta$ liegen und ausserdem $A'B'$ constant gleich AB sein

soll, so ist die Lage von B' bestimmt, sobald AA' als indepe dentes Differenzial angenommen worden ist, und es steht daher beweisen, dass sich die Differenzialien BB' und AA' zu einand verhalten wie die Normalen OB und OA, denn wenn dies Fall ist, so sind die unendlich kleinen Winkel $AOA' = \frac{AA'}{OA}$ u $BOB' = \frac{BB'}{OB}$ gleich und man darf sich dann ohne Weiteres v stellen, der Winkel AOB habe sich um seinen Scheitel O gedreht, dass er in die Lage $A'OB'$ gekommen sei. Zu dies Zwecke setze ich

$$\text{W. } ATO = \alpha, \quad AA' = h, \quad OT = m;$$
$$\text{W. } BTO = \beta, \quad BB' = k;$$

so verwandelt sich die Gleichung

$$AT^2 + BT^2 - 2AT.BT.\cos ATB = AB^2$$
$$= A'T^2 + B'T^2 - 2A'T.B'T.\cos ATB$$

in folgende:

$$m^2\cos\alpha^2 + m^2\cos\beta^2 - 2m^2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) =$$
$$(m\cos\alpha - h)^2 + (m\cos\beta + k)^2 - 2(m\cos\alpha - h)(m\cos\beta + k)\cos(\alpha+$$

Lässt man aus dieser Gleichung die gleichen Glieder beid seits und die Glieder mit den zweiten Dimensionen der verschw denden Grössen h und k weg, so ergiebt sich

$$2mh\cos\alpha - 2mk\cos\beta = 2m[h\cos\beta - k\cos\alpha]\cos(\alpha+\beta),$$

also

$$h[\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha+\beta)] = k[\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta)]$$

oder, nach leichten Transformationen,

$$h.\sin(\alpha+\beta)\sin\beta = k.\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

d. h.

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OB}{OA},$$

was zu beweisen war.

Es bedarf nun ferner nur noch der Bemerkung, dass je andere Punkt C, D u. s. f. des angenommenen Systems, weil fest und unveränderlich mit den Punkten A und B verbunden während der unendlich geringen Drehung, durch welche das D eck AOB in die Lage $A'OB'$ übergeht, auch gegen die Sei OA und OB dieses Dreiecks eine unveränderliche Lage behal wird, dass also

$$\text{W. } AOC = A'OC', \text{ sowie } OC = OC'$$
$$\text{W. } AOD = A'OD', \qquad OD = OD'$$

u. s. f. sein wird. Und hiermit ist der am Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Satz gerechtfertigt, und es ergiebt sich zugleich, dass die von O aus gezogenen Radien-Vectoren OC, OD u. s. f. auf den von C, D u. s. f. beschriebenen Curven normal stehen müssen.

§. 3.

Die mit den Halbmessern OA, OB.... beschriebenen Kreisbogen stehen mit den von den Punkten A, B.... bei der continuirlichen Bewegung des Systems wirklich durchlaufenen Curven im Allgemeinen nur in einer Berührung der ersten Ordnung, und der Punkt O ist keineswegs der Krümmungsmittelpunkt für diese Curven, wie am Deutlichsten vielleicht aus der Bemerkung hervorgeht, dass die eine oder andere dieser Curven, wie $B\beta$, ihre convexe Seite gegen O hinwenden kann, also ihren Krümmungsmittelpunkt auf der Verlängerung von OB über B hinaus haben muss. Forscht man nach der Grösse der einzelnen Krümmungshalbmesser, z. B. für den Punkt A, so müsste man sich in A' ebenfalls eine Normale auf die Curve errichtet denken und den Punkt zu bestimmen suchen, welchem sich der Durchschnittspunkt dieser Normale mit der vorhergehenden AO bei dem unendlichen Abnehmen von AA' ohne Ende nähert. Errichtet man ebenso in B' eine Normale auf die Curve $B\beta$, so wird diese mit der eben gedachten in A' auf die Curve $A\alpha$ errichteten Normale sich in einem Punkte O' durchschneiden, und es würden also die Convergenzpunkte von AO und $A'O'$, BO und $B'O'$, CO und $C'O'$ u. s. f. in Beziehung auf das unendlich klein werden von AA' gedacht, der Reihe nach die Krümmungsmittelpunkte der von A, B, C.... beschriebenen Curven sein.

§. 4.

Berücksichtigt man indessen, dass der eben gedachte Punkt O', nachdem die unendlich kleine Drehung um den vorigen Drehungspunkt O geschehen ist, ganz an dessen Stelle tretend, wiederum den Mittelpunkt für eine neue, unendlich geringe Drehung abgiebt, sowie dass OO' als Differenzial der Curve, auf welcher während der Bewegung des ganzen Systems sich alle Drehungsmittelpunkte O befinden, mithin als unendlich kleine aber gerade Linie zu denken ist: so wird man leicht auf eine andere Vorstellung geführt, nach welcher man das ganze System aller von A, B, C.... in jedem einzelnen Augenblick beschriebener Curvenelemente als zusammengehörige Differenzialien eines Systems cykloidischer Curven (gemeiner, oder gestreckter, oder verschlungener Cykloiden) auffassen wird, welches System in dem jedesmaligen Punkte O denjenigen Punkt besitzt, wo der sich fortwälzende Kreis die sogenannte Basis OO' tangirt.

In der That, wenn in Taf. I. Fig. 2. der um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QO beschriebene Kreis längs der Geraden GH fortrollt und zwar in dem durch die hinzu gezeichneten Pfeile

bemerklich gemachten Sinne, so beschreibt jeder beliebig in d Ebene dieses Kreises angenommene und mit dem Mittelpunkt auf eine feste und unveränderliche Weise verbundene Punkt ei gemeine oder gestreckte oder verschlungene Cykloi je nachdem sein Abstand von Q gleich ist dem Radius QO, od kleiner, wie dies bei dem Punkte A, oder grösser, wie dies b dem Punkte B der Fall ist. Zuvörderst lässt sich nun behaupte dass in jedem dieser Fälle die von O aus nach den beschreibe den Punkten gezogenen Geraden OA, OB.... auf den von d sen Punkten beschriebenen Cykloiden normal stehen. Dieser S ist in Betreff der gemeinen Cykloide allgemein bekannt, er lässt si aber auch ohne Schwierigkeit für die andern Arten beweis Denn setzt man $QO=r$, $QA=R$ und den veränderlichen W zungswinkel $OQA=\varphi$, nimmt GH als Abscissenaxe an und Ordinatenaxe parallel zu OQ, und fixirt den Ursprung der Co dinaten dahin wo $\varphi=0$ ist, so bestehen die Gleichungen

$$x=r\varphi-R\sin\varphi,\quad y=r-R\cos\varphi,$$

woraus folgt

$$dx=(r-R\cos\varphi)\,d\varphi=y\,d\varphi,\quad dy=R\sin\varphi\,d\varphi,$$

also

$$-\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{R\sin\varphi}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\frac{y}{R\sin\varphi}=\frac{AP}{OP}=\text{tang}\,AOG,$$

folglich

$$-\frac{y}{R\sin\varphi}=\text{tang}\,AOH;$$

und da $-\frac{dx}{dy}$ die trigonometrische Tangente des Winkels angie unter welchem die Normale der Curve gegen die Abscissenaxe g neigt ist, so muss die Normale des Punktes A mit AO zusamme fallen. Auch gilt alles dies unverändert für den Punkt B, we man unter R den Abstand QB versteht und bei φ sich, wie der festgesetzte Sinn der Drehung verlangt, den convexen Wi kel OQB vorstellt, so dass in der Gleichung $x=r\varphi-R\sin\varphi$ d letzte Bestandtheil $R\sin\varphi$ an und für sich einen negativen Wer erhält.

§. 5.

Man stelle sich nun vor, der mit dem Radius QO beschr bene Kreis rolle aus der betrachteten Stellung weiter fort, so da $OO'=r.\Delta\varphi$ sei, und es gelangen dadurch die Radien QA, QB in die Stellung $Q'A'$, $Q'B'$.., so werden, sobald man OO' in d

tand des unendlichen Abnehmens versetzt, die Winkel AOA', BB' u. s. f. sämmtlich einander gleich, nämlich gleich $d\varphi =$ ausfallen. Denn es ist, wenn man $AA' = ds$ und die Normale $= N$ setzt,

$$AOA' = \text{tang}\, AOA' = \frac{ds}{N};$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi \,.\, \sqrt{y^2 + R^2 \sin\varphi^2},$$
$$N = \sqrt{y^2 + OP^2} = \sqrt{y^2 + R^2 \sin\varphi^2};$$

$$\frac{ds}{N} = d\varphi.$$

nd da überdies die Curvenelemente AA', BB'... beziehungsweise auf OA, OB.... normal stehen, so dass

$$OA' = (OA^2 + AA'^2)^{\frac{1}{2}} = OA\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{AA'}{OA}\right) + \ldots.\right]$$

bei dem unendlichen Abnehmen von AA' sich von OA nur um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung unterscheidet; so sind die Umstände für die Erzeugung der cykloidischen Curven in jedem einzelnen Augenblicke ganz dieselben als wenn sich ein unveränderliches Dreieck AOB, oder allgemeiner ein unveränderliches System von Punkten A, B.... um einen in seiner Ebene liegenden Punkt O herumdrehte. Mit andern Worten: das System aller gleichzeitig beschriebenen Differenzialien der Cykloiden AA', BB'.... lässt sich auffassen als ein System von gleichzeitig und um das gemeinschaftliche Centrum O herum beschriebenen Kreisbogenelementen.

§. 6.

Stellt man mit diesem Ergebniss nun dasjenige zusammen, was in §. 2. und §. 3. über die Bewegung des Systems A, B, C.... der Taf. I. Fig. 1. gesagt worden ist, hält man also namentlich fest

erstens, dass sowohl bei jeder der früher gedachten von A, B, C.... in Taf. 1. Fig. 1. beschriebenen, als auch bei den so eben in §. 4. und §. 5. besprochenen Cykloiden die von O' aus gezogenen Geraden OA', OB' u. s. f. wiederum normal auf den bei A', B'.... anfangenden Curvenelementen $A'A''$, $B'B''$ stehen würden;

und zweitens, dass bei jeder Curve sowohl der einen als der andern Gattung der Krümmungsmittelpunkt gedacht werden kann als der Ort, welchem sich bei dem unendlichen Abnehmen der Drehungswinkel

$$AOA' = BOB' = COC' \text{ u. s. f.}$$

der Convergenzpunkt der beiden Normalen

$$AO \text{ und } A'O', \; BO \text{ und } B'O' \text{ u. s. f.}$$

ohne Ende nähert;
so ergiebt sich, dass die Krümmungshalbmesser zu den Cu
$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.... der Taf. I. Fig. 1. identisch sein müssen mit
Krümmungshalbmessern eines vorläufig noch unbekannten Sys
von Cykloiden, dessen Wälzungskreis im Punkte O die
tangirt. Dieses System von cykloidischen Bogen, die mit
Curven $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.... in einer Berührung der zweiten O
nung stehen, wird aber genau bestimmt sein, sobald es gelu
ist, aus der Beschaffenheit der beiden gegebenen Curven $A\alpha$
$B\beta$ die Richtung des Differenzials OO', sowie die Grösse
dem Wälzungskreis zukommenden Radius OQ zu ermitteln.
hierzu verhilft eine gewisse sehr einfache und bei allen drei A
der Cykloide geltende Formel für den Krümmungshalbmesser.

§. 7.

Wenn wir nämlich, um diesen Krümmungshalbmesser
der Formel

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x}$$

zu berechnen, die in §. 4. gefundenen Gleichungen

$$dx = y d\varphi \text{ und } dy = R \sin\varphi d\varphi$$

nochmals differenziiren, $d\varphi$ als independentes Differenzial be
delnd, so erhalten wir

$$d^2x = dy d\varphi = R \sin\varphi d\varphi^2 ,$$
$$d^2y = R \cos\varphi d\varphi^2 ;$$

also

$$dx d^2y - dy d^2x = (Ry \cos\varphi - R^2 \sin\varphi^2) d\varphi^3$$
$$= (Rr \cos\varphi - R^2 \cos\varphi^2 - R^2 \sin\varphi^2) d$$
$$= -R(R - r\cos\varphi) d\varphi^3 .$$

Ferner ist zu Folge §. 5., wenn man durchgängig unter N
Normalen AO, BO u. s. f. versteht,

$$ds = N d\varphi ,$$

also

$$\varrho = \pm \frac{N^3}{R(R - r\cos\varphi)} .$$

Sobald man aber von Q das Perpendikel QU_1 auf AO, und v
aus ein (in Taf. I. Fig. 2. nicht gezeichnetes) Perpendikel OW

AQ fällt, so ersieht man aus der Aehnlichkeit der Triangel AQU_1 und AOW_1 die Proportion $\frac{N}{AQ} = \frac{AW_1}{AU_1}$, d. h.

$$\frac{N}{R} = \frac{R - r\cos\varphi}{N - OU_1}.$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{N}{R}$ in die Formel für ϱ und bezeichnet den Winkel, welchen die vom Drehungsmittelpunkt O nach dem beschreibenden Punkt A gezogene Normale mit dem nach dem Centrum des rollenden Kreises gezogenen Radius OQ bildet, durch ϑ, so dass $OU_1 = r\cos\vartheta$ wird, so hat man

$$\varrho = \frac{N^2}{N - r\cos\vartheta}.$$

Dabei ist es leicht, sich zu überzeugen, dass die eben gebrauchte Gleichung

$$\frac{N}{R} = \frac{R - r\cos\varphi}{N - r\cos\vartheta}$$

auch in den Fällen richtig bleibt, wenn entweder, wie z. B. für den Punkt C der $\cos\vartheta$ einen negativen Werth erhält, oder auch dann, wenn $\cos\varphi$ negativ ist.

§. 8.

Die gefundene Formel lässt sich nun nicht allein dazu benutzen, um ϱ zu construiren, sobald N, r, ϑ bekannt sind, sondern sie wird auch, wenn an zwei Punkten des sich bewegenden Systems $ABC\ldots$ die Krümmungshalbmesser gegeben sind, sehr bequem zur Bestimmung der Lage und Grösse des gesuchten Halbmessers OQ verhelfen. Denn angenommen, ausser den Normalen $AO = N_1$ und $BO = N_2$ seien auch die den Punkten A und B zugehörigen Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 bekannt, so wird man zuvörderst die Grössen

$$AU_1 = (N_1 - r\cos\vartheta_1) = \frac{N_1^2}{\varrho_1},$$

$$BU_2 = (N_2 - r\cos\vartheta_2) = \frac{N_2^2}{\varrho^2}$$

construiren, hierdurch die Punkte U_1 und U_2 bestimmen und sobald man in diesen Punkten U_1 und U_2 Perpendikel auf die Normalen AO und BO errichtet, so wird deren Durchschnittspunkt den gesuchten Mittelpunkt des rollenden Kreises angeben. Alsdann aber ist, um für einen beliebigen dritten Punkt des sich bewegenden Systems, z. B. für den Punkt C, den Krümmungshalbmesser ϱ_3 zu bestimmen, in der Formel

$$\varrho_3 = \frac{N_3^2}{N_3 - r\cos\vartheta_3}$$

nicht allein $N_3 = CO$ und r, sondern auch $\vartheta_3 = COQ$ bekannt geworden, und man wird also ϱ_3 als dritte Proportionallinie zu zwei gegebenen Linien ohne Mühe construiren.

Es bedarf hierbei kaum der Bemerkung, dass man, wenn ϑ_3 ein stumpfer Winkel ist, für den Nenner $N_3 - r\cos\vartheta_3$ bei der Construction von ϱ_3 eine Summe zweier Linien erhält, dass derselbe aber in allen Fällen geradezu durch die Länge CU_3 dargestellt wird, sobald man vom gefundenen Mittelpunkt Q das Perpendikel QU_3 auf CO gefällt hat. Eine besondere Erwähnung dagegen verdient allerdings der Umstand, dass der Krümmungsmittelpunkt öfters auf der Normale N nicht von dem die Curve beschreibenden Punkte gegen den Drehungsmittelpunkt O hin, sondern in der entgegengesetzten Verlängerung von N liegen wird. Dieser Fall tritt dann ein, wenn die Cykloide, welche mit der beschriebenen Curve in einer Berührung zweiter Ordnung steht, an dem betreffenden Punkte ihre Convexität der Basis GH zukehrt. Stellt aber $y = f(x)$ die Gleichung der Cykloide zwischen y und x vor und bezeichnet man die zweite derivirte Funktion von $f(x)$ durch $f''(x)$, so muss bekanntlich, wenn der eben angedeutete Fall eintreten soll, $yf''(x)$ einen positiven Werth erhalten. In so fern nun x nicht als independente Variable behandelt werden soll, ist

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

folglich bei den Cykloiden, vermöge der in §. 7. entwickelten Formeln:

$$f''(x) = -\frac{R(R - r\cos\varphi)}{y^3},$$

und es erhält also $yf''(x)$ einen positiven Werth nur dann, wenn $r\cos\varphi > R$ ist.

Bei der verschlungenen Cykloide ist $r < R$ und bei der gemeinen ist $r = R$, folglich kann bei diesen beiden Arten niemals die eben aufgefundene Bedingung erfüllt werden, d. h. in keinem ihrer Punkte wendet eine verschlungene oder eine gemeine Cykloide der Basis GH ihre Convexität zu.

Bei einer gestreckten Cykloide ist dagegen $r > R$, und sobald also $\cos\varphi$ nicht allzu klein ausfällt, d. h. sobald W. φ nahe genug an Null oder an 2π angenommen wird, so muss $r\cos\varphi > R$ sein, also die Curve convex gegen die Basis liegen. Für die nähere Betrachtung eines solchen Falls ist die gestreckte Cykloide in Taf. I. Fig. 3. gezeichnet worden, welche in der Nähe des Punkts B die erwähnte Lage hat. Da $\cos\varphi$ für diese Annahme nothwendig positiv sein muss, weil sonst $R - r\cos\varphi$ gar nicht negativ werden könnte, so wird der W. OQB, mag er nun als φ oder, wie es in dieser Figur die Umstände erfordern, als $2\pi - \varphi$ aufgefasst werden, jedesmal spitz sein. Und da, wenn man das Perpendikel OW auf QB fällt, $QW = r\cos\varphi$ wird, während $QB = R$ ist, so führt die Voraussetzung $r\cos\varphi > R$ zu der Folgerung,

der Fusspunkt W auf die Verlängerung von QB über B hinfallen, dass also W. OBQ stumpf sein müsse. Deswegen muss auch der Fusspunkt des Perpendikels QU_2 auf die ängerung von OB über B hinaus, mithin in die Concavider Curve fallen.

Alles dies hat nun zwar keinen ändernden Einfluss auf die in vorgenommenen Rechnungen, denn man erhält gegenwärtig

$$BU_2 = r\cos\vartheta - N,\quad BW = r\cos\varphi - R,$$

immer noch ist

$$\frac{BO}{BQ} = \frac{BW}{BU_2}$$

$$\frac{N}{R} = \frac{r\cos\varphi - R}{r\cos\vartheta - N},$$

$$\varrho = \pm\frac{-N^2}{N - r\cos\vartheta}.$$

Allein es ergeben sich aus diesen Betrachtungen für die sichere endung der am Anfange dieses Paragraphen erklärten Conctionen folgende ergänzende Regeln:

1) um den Mittelpunkt Q des Kreises zu finden, welcher als zungskreis für die von den Punkten A, B, C.... zu beschreiden cykloidischen Curvenelemente zu betrachten ist, muss man Grössen

$$AU_1 = \frac{N_1^2}{\varrho_1} \text{ und } BU_2 = \frac{N_2^2}{\varrho_2}$$

A beziehungsweise von B aus auf der Normale N_1 resp. N_2 h der concaven Seite der Curve hin auftragen; — und 2) wenn man alsdann, um für einen anderen Punkt des beweg- Systems z. B. für C den Krümmungsmittelpunkt zu bestim-, die Normale $CO = N_3$ gezogen und auf diese von dem gefun- Punkt Q das Perpendikel QU_3 gefällt hat, so muss man Linie

$$\frac{N_3^2}{CU_3} - \frac{N_3^2}{N_3 - r\cos\vartheta_3} = \varrho_3$$

beschreibenden Punkte C aus auf der Normale nach der Seite hintragen, wohin der Fusspunkt Perpendikels QU_3 gefallen ist, weil dieser Punkt U_3 der Krümmungsmittelpunkt immer beide in der Concavität der me liegen müssen.

§. 9.

Durch das Vorhergehende ist nun das von Herrn Abel Transersonnene Verfahren zur Bestimmung der Krümmungshalb-

messer vollständig erläutert. Sobald nämlich die in §. 1. vorausgesetzten Umstände eintreten, d. h. sobald eine Curve auf die Art entstanden ist oder als entstanden aufgefasst werden kann, dass der beschreibende Punkt C mit zwei anderen Punkten A und B zu einem festen und unveränderlichen Dreieck verbunden ist und dass diese letztgenannten Punkte auf zwei gegebenen Curven $A\alpha$ und $B\beta$ fortrücken: so kann man, wohin auch immer der Punkt C gerückt sein mag, zuvörderst den Punkt O, daraus die Richtung der Normale CO, also gleichzeitig auch die Lage der Tangente, und dann nach den Regeln des §. 8., insofern man die den Punkten A und B zugehörigen und den gegebenen Curven $A\alpha$, $B\beta$ entsprechenden Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 ohne allzu grosse Weitläuftigkeit zu construiren im Stande ist, auch den Krümmungshalbmesser für die Curve $C\gamma$ bestimmen. Uebrigens dürfen wir hierbei nicht mit Stillschweigen übergehen, dass das erste Theorem, worauf Herr Abel Transon seine Methode gegründet hat und welches wir in §. 2. ausgesprochen und bewiesen haben, nämlich dass alle Normalen der von den einzelnen Punkten des beweglichen Systems beschriebenen Curven in jedem Augenblick in einem einzigen Punkte zusammen laufen, zuerst von Chasles, und zwar als eine Verallgemeinerung eines von Des-Cartes benutzten Satzes, aufgestellt worden ist (S. Chasles Geschichte der Geometrie, S. 649 der Uebersetzung von Sohncke).

§. 10.

Am einfachsten und merkwürdigsten unter allen Bewegungen des Dreiecks ABC ist der Fall, wenn die gegebenen Wege für die Punkte A und B beide geradlinig, also die Schenkel eines Winkels BQA (Taf. I. Fig. 4.) sind; und um von den vorhergehenden Regeln zum Beschluss eine Anwendung zu machen, wollen wir diesen Fall voraussetzen. Jeder beliebig in der Ebene der Figur angenommene und mit A und B fest und unveränderlich verbundene Punkt C beschreibt alsdann eine Ellipse, deren Mittelpunkt sich im Scheitel des W. BQA befindet. Errichtet man nun in A und B auf die Schenkel des W. BQA die Perpendikel AO und BO und zieht nach deren Durchschnittspunkt CO, so hat man die Normale und kann sofort auch die Tangente am Punkte C ziehen. Ferner, da die Krümmungshalbmesser an den Punkten A und B gegenwärtig, in was für eine Lage das ΔABC auch rücken mag, jedesmal unendlich sind, so fallen die im Vorhergehenden mit U_1 und U_2 bezeichneten Punkte mit A resp. B zusammen, woraus folgt, dass jetzt der Scheitel des W. BQA zugleich den zu suchenden Mittelpunkt des Wälzungskreises bildet. Alles dies ist übrigens auch bei der gestreckten Cykloide der Fall, welche der Punkt A in Taf. I. Fig. 2. oder der Punkt B in Taf. I. Fig. 3. beschreibt, sobald der W. QAO (resp. QBO) ein Rechter, nämlich $\cos\varphi = \frac{AQ}{OQ} = \frac{R}{r}$ ist, weil dann in den gefundenen Formeln

$$\varrho = \frac{N^3}{R(R - r\cos\varphi)} \text{ oder } \varrho = \frac{N^2}{N - r\cos\vartheta}$$

er Nenner sich auf Null reducirt.

Fällt man daher in Taf. I. Fig. 4. von Q aus auf CO das erpendikel QU, so ist der Krümmungshalbmesser für den Punkt C eich $\frac{CO^2}{CU}$ und ist aufzutragen in der Richtung von C nach U.

§. 11.

Bei einer genaueren Betrachtung der hier gedachten Bewegung es Dreiecks ABC ergeben sich jedoch noch einige andere merkürdige Gesetze. Sucht man nämlich für den Punkt O den geomeischen Ort zu bestimmen, dessen Differenzial früher durch OO' ezeichnet wurde (Vgl. §. 3.), so findet man dafür einen Kreis, er um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels AQA mit dem Radius QO zu beschreiben wäre.

Denn man setze

$$QO = r,\ \text{W.}\,QOA = \vartheta_1,\ \text{W.}\,QOB = \vartheta_2,$$

o dass W. $AOB = AQB = \vartheta_1 - \vartheta_2$ ist, so erhält man aus dem $\Delta\, AQB$ die Gleichung

$$AB^2 = r^2\sin\vartheta_1{}^2 + r^2\sin\vartheta_2{}^2 - 2r^2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

nd aus dem $\Delta\, AOB$ die Gleichung

$$AB^2 = r^2\cos\vartheta_1{}^2 + r^2\cos\vartheta_2{}^2 - 2r^2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

olglich durch Addition

$$2AB^2 = 2r^2[1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2] = 2r^2\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2,$$

Man

$$AB = r\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = QO.\sin AQB.$$

Hieraus aber fliesst für QO der Werth

$$QO = \frac{AB}{\sin AQB},$$

nd da sowohl der Zähler als der Nenner dieses Bruches unverändlich ist, so bleibt QO während der Bewegung des Dreiecks ABC eine constante Grösse, was zu beweisen war.

Wir haben freilich hier den Fall zu Grunde gelegt, wo die Perpendikel AO und BO sich ausserhalb des Winkels Q schneiden, im entgegengesetzten Falle aber, wenn O zwischen die Schenkel des W. Q fällt, lässt sich der Beweis mit einer nur ganz geringen Aenderung eben so leicht führen.

§. 12.

Man nehme jetzt an, das von Q auf CQ gefällte Perpendikel

QU schnitte bei seiner Verlängerung die Ellipse in einem Punkte C', und es gehörten mit C' die Punkte A' und B' in der Art zusammen, dass das $\Delta\, A'B'C'$ die Lage des beweglichen Dreiecks in dem Augenblick angiebt, wenn die Spitze C den elliptischen Bogen CC' beschrieben hat. Fasst man nun einerseits die Lage des Punkts Q gegen das $\Delta\, A'B'C'$, andererseits die Lage des Punkts O gegen das $\Delta\, ABC$ ins Auge und beachtet, dass die Strahlen $B'Q$, $C'Q$, $A'Q$ der Reihe nach senkrecht stehen auf den in O zusammenlaufenden Strahlen BO, CO, AO; so sieht man sogleich, dass die Winkel

$$B'QC',\ C'QA',\ B'QA'$$

gleich sind den Winkeln

$$BOC,\ COA,\ BOA.$$

Hieraus aber folgt die Congruenz der beiden Vierecke $QB'CA'$ und $OBCA$. Denn wenn man sich das Dreieck $A'B'C'$ als gegeben denkt und den Punkt Q dadurch zu bestimmen sucht, dass man über den Seiten $A'B'$ und $B'C'$ Kreisabschnitte construirt, welche die ebenfalls gegebenen Peripheriewinkel $A'QB'$ und $B'QC$ fassen, so sieht man, dass beide Kreisbogen, weil sie bereits in B' sich schneiden, nur noch einen zweiten und deswegen bestimmten Durchschnittspunkt Q darbieten werden, worauf sich die bekannte Pothenot'sche Aufgabe stützt. Zwar würde sich allerdings ein mit ABC congruentes Dreieck — nennen wir es $\alpha\beta\gamma$ — auch noch auf eine andere Art zwischen die in Q zusammenlaufenden Strahlen legen lassen, so dass immer noch α, β, γ der Ordnung nach auf QA', QB', QC' befindlich und dennoch das Viereck $Q\beta\gamma\alpha$ nicht mit $QBCA$ congruent wäre. Aber dieses Dreieck $\alpha\beta\gamma$ würde dann mit seiner entgegengesetzten Fläche in der Ebene der Figur aufliegen, gerade so als wenn man das Dreieck $A'B'C'$ vorerst um $A'B'$ als Rotationsaxe um 180° drehen und dann noch etwas verschieben wollte; es würde also dieses $\Delta\, \alpha\beta\gamma$ streng genommen nicht mit ABC congruent, sondern symmetrisch gleich (gegenbildlich gleich) sein, und weil eine solche Herumwendung des $\Delta\, ABC$ in unserer vorliegenden Betrachtung ganz gegen die Voraussetzung sein würde, so ist das erwähnte, mit $QBCA$ nicht congruente Viereck $Q\beta\gamma\alpha$ offenbar auszuschliessen und sein Vorkommen für unmöglich zu erklären, also Viereck $QB'C'A' \cong QBCA$.

Aus dieser Congruenz folgen nun zuvörderst die Gleichungen

$$QA' = OA,\ QB' = OB,\ QC' = OC;$$

ferner, weil die homologen Diagonalen QC' und OC durch Construktion perpendikulär auf einander gestellt sind, so müssen auch die andern Diagonalen und überhaupt alle homologen Seiten senkrecht auf einander stehen, namentlich

$$A'B' \perp AB,\ B'C' \perp BC,\ A'C' \perp AC.$$

§. 13.

Besonders merkwürdig scheint endlich noch folgendes Resultat. Da OC die Richtung der Normale für die Ellipse im Punkte

C angiebt und da QC' senkrecht auf OC steht, so ist QC' parallel zu der dem Punkte C zugehörigen Tangente, also sind QC und QC' zwei conjugirte Semidiameter der Ellipse. Dass man aber, sobald zwei conjugirte Diameter nebst ihrem Conjugationswinkel gegeben sind, die Lage und Grösse der Hauptaxen u. dgl. m. durch ganz leichte Construktionen findet, bedarf nicht der Erinneruug.

Ferner, da man für den Krümmungshalbmesser ϱ am Punkte C in §. 10. den Ausdruck $\frac{CO^2}{CU}$ gefunden hat und da zufolge §. 12. $CO=QC'$ ist, so besteht die Gleichung

$$\varrho=\frac{\overline{QC'}^2}{CU},$$

d. h. um den Krümmungshalbmesser ϱ für einen beliebigen Punkt C in einer gegebenen Ellipse zu construiren, ziehe man nach C den Semidiameter QC, bestimme den zugehörigen conjugirten Semidiameter QC', und fälle vom gegebenen Punkte ein Perpendikel CU auf diesen letztern, so ist ϱ die dritte Proportionallinie zum Perpendikel CU und dem conjugirten Semidiameter QC'.

Nachschrift des Herausgebers.

Schon vor Empfang des vorhergehenden Aufsatzes hatte ich aus dem Institut die Stellen, welche die Methode des Herrn Abel Transon betreffen, ausgezogen, um sie gelegentlich den Lesern des Archivs mitzutheilen. Desto angenehmer wurde ich natürlich durch den mir gütigst zugesandten Aufsatz des Herrn Professor Dr. Stegmann überrascht, und halte mich nun, damit die Leser des Archivs sehen, wie gering die Grundlagen waren, von denen derselbe bei Abfassung seiner Abhandlung ausgehen konnte, um so mehr verpflichtet, die betreffenden Stellen aus dem Institut, welches wohl nur in die Hände weniger Leser des Archivs kommen dürfte, im Folgenden abdrucken zu lassen, was auch vielleicht noch anderen Nutzen haben kann. Leider habe ich unterlassen, die betreffenden Nummern des genannten Journals, welches, nachdem es auf kurze Zeit in meinen Händen gewesen ist, sogleich eine weitere Wanderung nach Norden antritt, überall genau zu bemerken, und bin dieselben aus dem angegebenen Grunde jetzt nachzutragen ausser Stande, weshalb ich hier schliesslich um Verzeihung bitte.

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon indique une construction nouvelle pour le rayon de courbure de l'ellipse. — On sait que l'ellipse est engendrée par le sommet T d'un triangle TAB, lorsqu'on fait glisser les extrémités de la base AB sur deux axes fixes. Ce mode de description est même assez souvent employé dans la confection des épures; mais alors on réduit le triangle à la ligne de base AB, en plaçant le sommet T sur un point quelconque de cette ligne.

Dans tous les cas, on sait que si on élève en A et B deux droites perpendiculaires respectivement aux axes directeurs, ces lignes se rencontrant en O, la droite TO est à chaque instant la normale de l'ellipse pour la situation actuelle du point décrivant.

Dans tous les cas aussi on pourra construire le rayon de curbure à l'aide de la remarque suivante. Abaissez du centre M de la courbe (point de rencontre des axes) une perpendiculaire MC sur la normale TO. Soit C le pied de cette perpendiculaire. Le rayon de courbure est une troisième proportionelle aux lignes TC et TO; c'est-à-dire qu'on a $R=\frac{TO^2}{TC}$, expression très facile à construire. On sait d'ailleurs depuis long-temps, qu'en prolongeant la perpendiculaire MC jusqu'à sa rencontre en L avec la courbe, on a:

$$R=\frac{ML^2}{TC},$$

d'où il suit que la distance des points O et T est égale au demi diamètre conjugué de MT.

(L'Institut. 1844. Nr. 573.)

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon communique une construction du rayon de courbure de l'ellipse. Cette construction est appropriée au cas ou on engendre la courbe en augmentant ou diminuant toutes les ordonnées d'un cercle dans un même rapport.

Soient M le point de l'ellipse et M' le point correspondant du cercle; ces deux points situés sur une même ordonnée; soient ϱ le rayon de courbure de l'ellipse en M, et α l'angle de la normale avec l'ordonnée. Soit aussi r le rayon de courbure de l'ellipse à l'extrémité de l'axe qui est parallèle aux ordonnées; et soit α' l'angle que fait en M' le rayon du cercle avec l'ordonnée MM'. On a la relation

$$r\cos^3\alpha' = \varrho\cos^3\alpha,$$

de laquelle on tire une construction très simple.

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon communique une méthode géométrique pour déterminer les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes. Cette méthode est fondée sur le principe suivant:

Quand une figure plane éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, ce mouvement peut être représenté par un cercle qui roule sans glisser sur une certaine droite.

Les arcs circulaires (infiniment petits) décrits par les différents points de la figure, pendant le mouvement infiniment petit, peuvent être considérés comme des arcs de cycloide (ordinaire, allongée ou accourcie) produit par le roulement de ce cercle.

D'après ce théorème, quand une courbe est décrite par un poi d'une figure en mouvement dans son plan, il suffira, pour construi son rayon de courbure, de déterminer la grandeur et la situation du cercle qui roule au moment du mouvement ou le point décrivant aura

osition qu'on considère; ensemble déterminer la situation de la droite laquelle le roulement a lieu. Ce cercle et cette droite se déterminent à chaque instant par les différentes conditions du mouvement de figure.

En effet, il y a une formule très simple pour le rayon de courbure e cycloide (ordinaire, allongée ou accourcie). Cette formule est

$$R=\frac{N^2}{N-r\cos i},$$

laquelle N est la partie normale de la cycloide entre le point ivant et le point, sur lequel le roulement s'opère; r est le rayon cercle roulant, et i l'angle que fait la normale du cycloide avec ayon de cercle mené du centre au point de roulement.

Ce point de roulement n'est autre que le point qui reste fixe dans nouvement infiniment petit de la figure, c'est-à-dire le point par el passent à chaque instant les normales aux trajectoires décrites les divers points de la figure. — M. Chasles a fondé sur la conation de ce point qui reste fixe une méthode géométrique pour la rmination des tangentes, methode applicable „toutes les fois qu'on nait les conditions géométriques du mouvement d'une figure de forme riable à laquelle appartient le point décrivant." (Chasles Apercu torique sur l'origine et le développement des méthodes géométrie). — Dans les mêmes circonstances la méthode qu'on nt d'exposer donnera la détermination du rayon de courbure.

Par exemple, si on connait le mouvement de deux points de la re, on mènera par ces points les normales aux courbes qu'ils parrent. Appelons d'ailleurs R_1 le rayon de courbure de la courbe rite par le premier point, sur la normale à la courbe décrite, et s la concavité de cette courbe, on porte une longueur égale à $\frac{N_1^2}{R_1}$, trémité de cette longueur marquera la projection du centre du cercle lant; ce en vertu de la formule

$$r\cos i_1=N_1-\frac{N_1^2}{R_1}.$$

construira de même la projection de ce même centre sur la normale la seconde courbe; et alors il sera bien aisé de construire le centre -même, ayant ses projections sur deux droites.

Projetez le centre du cercle roulant sur la normale OT au point crivant; et soit C le pied de la perpendiculaire projetante: on aura, r le rayon de courbure de la courbe décrite par le point T, une idième proportionelle aux lignes OT et TC; c'est à dire

$$R=\frac{TO^2}{TC};$$

TO correspond, dans la formule générale, à N, et CT à $N-r\cos i$. quoi il convient d'ajouter, pour fixer le sens de la courbure, que le nt C, projection du centre du cercle roulant, est toujours dans la vité de la courbe décrite.

On voit maintenant que la formule communiquée dans une séance cédente, pour le rayon de courbure de l'ellipse, n'était qu'une simple plication de cette méthode générale. Cette méthode s'applique aussi s beaucoup de facilité à la construction du rayon de courbure des choides et des cissoides.

VIII.

Beweis des Lehrsatzes: Wenn ein beliebiges Dreieck in einer Ebene so bewegt wird, dass sich die Endpunkte seiner Basis fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden befinden, so wird von seiner Spitze eine Ellipse beschrieben.

Von dem

Herrn Professor Dr. Stegmann

an der Universität zu Marburg.

In dem Aufsatze Nr. VII. dieses Hefts habe ich, nach dem Vorgange von Abel Transon, um dessen Methode zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers auf die Ellipse anzuwenden, den Lehrsatz als bekannt angenommen:

Wenn eine Gerade BC von constanter Länge so bewegt wird, dass sich ihre Endpunkte fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden (oder anders ausgedrückt auf den Schenkeln eines ebenen Winkels) befinden, so wird jeder Punkt A, welchen man in der Ebene der Figur beliebig angenommen aber mit B und C in eine feste Verbindung gesetzt hat, so dass das ΔBCA während der Bewegung der Grundlinie BC eine unveränderliche Gestalt behält, eine Ellipse beschreiben, deren Mittelpunkt sich im Durchschnittspunkt der zwei festliegenden Geraden (im Scheitel des gegebenen festliegenden Winkels) befindet.

Dieser Lehrsatz ist für einige besondere Fälle allerdings von alten Zeiten her bekannt. Schon in Newton's Arithm. univers. in dem Abschnitt de resolutione quaestionum geometricarum, behandelt das problema XXXV. den am nächsten liegenden Fall, mit welchem heutiges Tags Jedermann vertraut ist, wenn nämlich der Winkel BCA gleich Null oder gleich 180^0 ist, d. h. wenn der b

ende Punkt A irgendwo in der sich bewegenden Geraden gt, und im problema XXXVI. den Fall, wenn sowohl der , auf dessen Schenkeln die Punkte B und C fortrücken als auch der W. BCA ein Rechter ist. Seit Newton nn in gar mancherlei Schriften diese Sätze von neuem auf- und bewiesen worden, und so findet man z. B. noch em Archiv (Thl. VI. Heft 2. Seite 222.) für den erst- ten Fall einen kurzen, freilich von dem Newton'- wesentlich nicht verschiedenen Beweis von Herrn Professor zu Stuttgart. Allein in der oben ausgesprochenen Allge- it ist der Satz vielleicht noch nicht in gleichem Grade be- eworden. Es war im Jahr 1839, als ich gewahr wurde, m diese allgemeine Gültigkeit zukommt, und in dem auf 1840 erschienenen Programm des Marburger Gymnasiums h sowohl den Beweis dafür geliefert, als auch verschiedene ngen für besondere Fälle daraus hergeleitet. Dessen un- t muss ich glauben, nachdem ich in Chasles Geschichte ometrie zwei darauf bezügliche Stellen (Seite 450 und Seite Uebersetzung von Sohncke) gelesen habe, dass der Satz llein schon früher entdeckt gewesen, sondern auch wohl in kten aber mir nicht zu Gesicht gekommenen Schriften be- ewiesen sei; und nur für den Fall, wenn der Herr Heraus- es an und für sich für wichtig genug oder als Ergänzung ifsatzes Nr. VII. für angemessen halten sollte*), setze ich eweis hierher.

§. 1.

s sei in Taf. I. Fig. 5. W. $B_0QX=q$, der gegebene Win- uf dessen Schenkeln die Endpunkte der Basis BC des be- hen Dreiecks BCA fortrücken sollen, wodurch die Spitze ses Dreiecks die Curve A_0A zu beschreiben genöthigt ist; an setze

$$BC=a,\quad AC=b,\quad \text{W. } BCA=\gamma.$$

erner nehme man den Scheitelpunkt Q als Ursprung recht- ger Coordinaten, den Schenkel QX als Abscissenaxe und ositiven Ordinaten y auf derjenigen Seite von QX an, auf er der W. q oder, anders ausgedrückt, der feste Schenkel liegt.

ezeichnet man nun den veränderlichen Winkel BCX durch φ, fert das rechtwinklige Dreieck ACP die Gleichungen

$$(1)\qquad y=b\sin(\varphi-\gamma),$$

$$(2)\qquad x-QC=b\cos(\varphi-\gamma);$$

aus dem Δ BCQ ergiebt sich

*) Jedenfalls halte ich dies zur Ergänzung des vorhergehenden atzes als völlig angemessen, weil dadurch das Verständniss jenes atzes für manchen Leser erleichtert werden wird. G.

$$\frac{QC}{a}=\frac{\sin(\varphi-q)}{\sin q}=\frac{\sin[(\varphi-\gamma)+(\gamma-q)]}{\sin q}$$
$$=\frac{\sin(\varphi-\gamma)\cos(\gamma-q)}{\sin q}+\frac{\sin(\gamma-q)\cos(\varphi-\gamma)}{\sin q}.$$

Daher verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$x-\frac{a\sin(\varphi-\gamma)\cos(\gamma-q)}{\sin q}=[b+\frac{a\sin(\gamma-q)}{\sin q}]\cos(\varphi-\gamma),$$

und wenn man hier die aus (1) fliessenden Werthe

$$\sin(\varphi-\gamma)=\frac{y}{b},\ \cos(\varphi-\gamma)=\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

substituirt, zugleich beide Seiten der Gleichung in's Quadrat erhebt und der Kürze wegen

$$\gamma-q=\delta$$

setzt, so erhält man

$$x^2-\frac{2axy\cos\delta}{b\sin q}+\frac{a^2y^2\cos\delta^2}{b^2\sin q^2}$$
$$=(b+\frac{a\sin\delta}{\sin q})^2-(b^2+\frac{2ab\sin\delta}{\sin q}+\frac{a^2\sin\delta^2}{\sin q^2})\frac{y^2}{b^2};$$

oder geordnet:

$$(3)\quad x^2-\frac{2axy\cos\delta}{b\sin q}+(1+\frac{2a\sin\delta}{b\sin q}+\frac{a^2}{b^2\sin q^2})y^2=(b+\frac{a\sin\delta}{\sin q})^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die vom Punkt A beschriebene Curve ein Kegelschnitt ist; und da, wenn man die allgemeine Gleichung des zweiten Grads zwischen zwei Variablen

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

mit der gefundenen vergleicht, die Coefficienten D und E gleich Null sind, so ist der gewählte Anfangspunkt der Coordinaten nämlich Q, der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts.

Ferner da gegenwärtig

$$A=\frac{a^2}{b^2\sin q^2}+\frac{2a\sin\delta}{b\sin q}+1,$$
$$B=-\frac{2a\cos\delta}{b\sin q},$$
$$C=1;$$

also

$$B^2-4AC=4\left(-\frac{a^2\sin\delta^2}{b^2\sin q^2}-\frac{2a\sin\delta}{b\sin q}-1\right)=-4\left(\frac{a\sin\delta}{b\sin q}+1\right)^2,$$

durchaus negativ ist, so muss der erzeugte Kegelschnitt in allen Fällen eine Ellipse sein.

§. 2

Obwohl aber hiermit der aufgestellte Lehrsatz schon erwiesen ist, so wird doch die folgende Ergänzung desselben auch noch einiges Interesse in Anspruch zu nehmen geeignet sein.

Am Anfange der eben betrachteten Bewegung des Dreiecks BCA befanden sich dessen Ecken der Ordnung nach in B_0, Q, A_0 und die Bewegung des Dreiecks zwischen den Schenkeln des Winkels q ist eigentlich zu Ende, sobald der Punkt B nach Q und der Punkt A nach K gerückt ist. Wenn man nun aber den Punkt B auf die Verlängerung des Schenkels B_0Q fortrücken, also die Basis BC zwischen den Schenkeln des Nebenwinkels XQB' sich bewegen lässt, so beschreibt die Spitze A jetzt eine Curve, deren Anfang in der Figur durch die punktirte Linie KA' bezeichnet ist, und welche geradezu die Fortsetzung des elliptischen Bogens A_0K bildet.

Um dies zu beweisen, wollen wir die Gleichungen des vorigen Paragraphen auf diese neue Curve KA' anwenden, indem wir

$$\text{W. } C'QB'=q', \quad \text{W. } B'C'X=\varphi', \quad \text{W. } B'C'A'=\gamma'$$

setzen, und bemerken, dass die Richtung für die positiven y', wenn wir die Gleichung (3) auf diesen neuen Fall beziehen wollen, in Folge der gleich Anfangs im vorigen Paragraphen festgesetzten Bestimmung, nunmehr nach derjenigen Seite der Abscissenaxe QX fallen müsse, auf welcher der W. $XQB'=q'$ liegt, so dass die Richtung der positiven y' jetzt der im vorigen Paragraphen für die positiven Ordinaten geltenden gerade entgegengesetzt sein würde. Ferner haben wir unter γ' offenbar den convexen Winkel $B'C'A'$ zu verstehen, weil wir sonst nicht, in Uebereinstimmung mit der Gleichung (1), worauf die Gleichung (3) gegründet ist, setzen könnten:

$$A'P'=b\sin A'C'X=b\sin(\varphi'-\gamma'),$$

während man, unter γ' den convexen Winkel verstehend, aus dieser Gleichung den richtigen negativen Werth für $A'P'$ erhält. Dies vorausgeschickt, so ergiebt sich die Gleichung der neuen Curve KA' ohne Weiteres, sobald in der Gleichung (3) an die Stelle von y, q und $\delta=\gamma-q$ die Grössen y', q' und $\delta'=\gamma'-q'$ treten, da an die Buchstaben x, a, b Accente zu setzen nicht nöthig ist. Wenn dagegen die positive Richtung für die Ordinaten der neuen Gleichung ebenfalls, gerade wie die positiven y der Gleichung (3), auf die Seite des Winkels B_0QX fallen soll, so

ist y' mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen, un durch entsteht folgende Gleichung:

$$(4)\quad x^2+\frac{2axy'\cos\delta'}{b\sin q'}+(1+\frac{2a\sin\delta'}{b\sin q'}+\frac{a^2}{b^2\sin q'^2})y'^2 =(b+\frac{a\sin\delta'}{\sin q'})^2.$$

Nun finden aber zwischen den Constanten in dieser Gleic und denjenigen der Gleichung (3) folgende Relationen Statt:

$$q'=\pi-q,\quad \gamma'=2\pi-\gamma,\quad \gamma'-q'=\pi-(\gamma-q)$$

also

$$\sin q'=\sin q,\quad \sin\delta'=\sin(\gamma-q)=\sin\delta,\quad \cos\delta'=-\cos(\gamma-q)=-\cos\delta;$$

und sobald man diese Werthe in die Gleichung (4) substituir überzeugt man sich, dass dieselbe mit der Gleichung (3) iden ist, dass also die Kurve KA' nichts anderes sein kann al Fortsetzung der Curve A_0K.

IX.

Völlig strenge und allgemeine Auf sung der Hauptaufgabe der höher Geodäsie.

Von

dem Herausgeber.

Vorerinnerung.

Die Aufgaben der höhern Geodäsie sind bisher immer bloss n rungsweise mit Hülfe der unendlichen Reihen aufgelöst worden, in man bloss einige der Anfangsglieder dieser Reihen berücksichtigte, ch weiter auf eine bestimmte theoretische Untersuchung über die

z dieser Reihen und den Grad derselben einzulassen, da wohl
n gegenwärtigen Zustande der Analysis eine blosse Untersuchung
n dem ersten weggelassenen Gliede hervorgebrachten Einflusses
nit dem Namen einer strengen theoretischen Untersuchung der
genz der fraglichen Reihen belegt werden darf, wobei übrigens
nbemerkt zu lassen ist, dass man auf diesem Wege, und aus
rhergehenden Gesichtspunkte betrachtet, zu mehreren ein grosses
e darbietenden sehr eleganten Resultaten gelangt ist, wie z. B.
bekannten Legendre'schen Theorem für die Kugel, seiner mit
berühmten Erweiterung auf krumme Flächen überhaupt u. dgl.*),
chönheit und Wichtigkeit jeder Kundige anerkennen muss. Aus-
ist mir nicht bekannt, dass man bei den fraglichen Untersuchun-
e bestimmte directe Rücksicht auf die dritte Coordinate der
auf der Erdfläche, nämlich auf die Höhe derselben über der
läche genommen hätte. Jedenfalls hatte man wenigstens bei meh-
ieser Untersuchungen zunächst und vorzugsweise das praktische
iss im Auge, und fand dann allerdings auch in der nahen Ueber-
mung der auf dem Wege der Rechnung gefundenen Resultate mit
n unmittelbar gemessenen Elementen eine für praktische Zwecke
nende Bürgschaft für die Richtigkeit der ganzen Operation.
se und ähnliche Betrachtungen haben mich veranlasst, für meh-
r wichtigsten und in der Praxis am Häufigsten in Anwendung
nde Aufgaben der höheren Geodäsie völlig strenge und theore-
ichtige Auflösungen zu suchen, welche ich nach und nach im Ar-
mittheilen werde, weil dieselben, wie es mir scheint, zugleich
nässige Uebungen in der Anwendung der Lehren der analytischen
trie darbieten, und mache in dem vorliegenden Aufsatze den An-
it der folgenden Aufgabe, welche wohl mit Recht als die Haupt-
e der gesammten höheren Geodäsie zu betrachten ist:

**Wenn die Längen, Breiten und Höhen über der Meeres-
e zweier Punkte auf der Erde, deren durch die Ge-
ntheit aller Meeresflächen dargestellte wahre oder
ntliche Oberfläche als die Oberfläche eines durch Um-
ung einer Ellipse, deren beide Axen als bekannt ange-
nen werden, um ihre Nebenaxe entstandenen Ellipsoids
sehen wird, gegeben, und in diesen Punkten die hori-
alen Projectionen der beiden Winkel, welche die von
ersten der beiden gegebenen Punkte nach dem zweiten
benen Punkte und nach einem dritten seiner Lage nach
kannten Punkte, und die von dem zweiten der beiden
benen Punkte nach dem ersten gegebenen Punkte und
selben dritten seiner Lage nach unbekannten Punkte
genen geraden Linien mit einander einschliessen, —
die Projectionen dieser beiden Winkel auf den durch
eiden gegebenen Punkte gelegten, auf den diesen Punk-
ntsprechenden, auf der Oberfläche des Erdellipsoids
alen Richtungen der Schwerkraft senkrecht stehenden
en, — gemessen worden sind; so soll man die Lage des
en Punktes, d. h. dessen Länge, Breite und Höhe über
eeresfläche bestimmen.**

ei dieser Aufgabe zeige ich zugleich, wie durch die Auflösung
ein bestimmtes Kriterium für den Grad der bei der Bestimmung
ge des unbekannten Punktes erreichten Genauigkeit dargeboten
welches natürlich für die Praxis von grosser Wichtigkeit ist, und

*) M. s. u. A. meine Sphäroidische Trigonometrie. Berlin
4., wo diese Untersuchungen in ziemlicher Ausführlichkeit darge-
ist.

bin der Meinung, dass man wenigstens bei der Festlegung der Haup
punkte einer in's Grosse gehenden jederzeit sehr kostspieligen geodät
schen Operation, an welche die Bestimmung der Lage aller übrig
Punkte angeschlossen wird, sich der in diesem Aufsatze entwickelte
oder einer ähnlichen gar keine Näherungen in Anspruch nehmende
streng geometrischen Methode bedienen sollte. Wie man sich geodät
scher Operationen mit Hülfe der im Folgenden entwickelten Methode au
zur genaueren Bestimmung des schon nahe bekannten Werths der A
plattung des Erdsphäroids bedienen kann, ist in diesem Aufsatze auch
der Kürze gezeigt worden, und in einigen nach und nach noch folge
den Aufsätzen gedenke ich zu zeigen, wie man sich die Data, welc
der hier aufgelösten Aufgabe als bekannte Grössen zum Grunde lieg
wenigstens insofern dabei bloss geodätische, und nicht auch astronon
sche Operationen und etwa barometrische Höhenbestimmungen in Anwe
dung kommen, zu verschaffen hat.

---

§. 1.

Die wahre oder eigentliche Oberfläche der Erde, von welch
die Meeresfläche ein Theil ist, betrachten wir im Folgenden a
die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse, deren Ax
hier als bekannt angenommen werden, entstandenen elliptisch
Sphäroids.

Alle Punkte auf der Erde werden als Punkte im Raume b
trachtet, deren gegenseitige Lage mit aller nur möglichen Genaui
keit zu bestimmen der Hauptzweck aller geodätischen Messu
gen ist.

Zur Bestimmung der Lage der Punkte im Raume benutz
wir im Folgenden im Allgemeinen ein durch den Mittelpunkt d
Erde als Anfang gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem d
xyz. Die Ebene des Erdäquators soll die Ebene der xy und d
Erdaxe soll die Axe der z sein. Der positive Theil der Axe
sei der Halbmesser des Erdäquators, von welchem an die geogr
phischen Längen von 0 bis zu 360° gezählt werden, und den p
sitiven Theil der Axe der y wollen wie so annehmen, dass m
sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch d
rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der A
der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen mus
nach welcher die geographischen Längen von 0 bis 360° gezäl
werden; der positive Theil der Axe der z sei der vom Mittelpunk
der Erde nach deren Nordpole hin gerichtete Theil der Erdaxe.

Die drei 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine v
einem beliebigen Punkte im Raume ausgehende gerade Linie r
den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, d
Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst, von denen wir
Folgenden häufig Gebrauch machen werden, wollen wir die B
stimmungswinkel der in Rede stehenden geraden Linie
Bezug auf das System der xyz nennen.

§. 2.

Wenn a den Halbmesser des Erdäquators und b die halbe
xe bezeichnet, so ist

$$1) \quad u=\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0$$

Gleichung der Oberfläche der Erde, und folglich, indem alle
rentialquotienten partielle Differentialquotienten sind:

$$2) \quad \frac{du}{dx}=\frac{2x}{a^2}, \frac{du}{dy}=\frac{2y}{a^2}, \frac{du}{dz}=\frac{2z}{b^2}.$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes
aume und x_1', y_1', z_1' die Coordinaten des Punktes der Ober-
e der Erde, in welchem die dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entspre-
de Vertikale auf derselben senkrecht steht, so sind, wenn wir

$$3) \quad u_1'=\frac{x_1'^2+y_1'^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{b^2}-1$$

en, nach den Principien der höheren Geometrie

$$4) \quad \frac{x-x_1'}{\frac{du_1'}{dx_1'}}=\frac{y-y_1'}{\frac{du_1'}{dy_1'}}=\frac{z-z_1'}{\frac{du_1'}{dz_1'}},$$

nach 2)

$$5) \quad \frac{a^2(x-x_1')}{x_1'}=\frac{a^2(y-y_1')}{y_1'}=\frac{b^2(z-z_1')}{z_1'}$$

Gleichungen der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Vertikale,
denen man für $x=0$ auch $y=0$ und

$$z=-\frac{a^2-b^2}{b^2}z_1'$$

lt, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass im Allgemeinen die
der z von der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Vertikale
hnitten wird, diese Vertikale also in der Ebene des dem
kte $(x_1y_1z_1)$ oder $(x_1'y_1'z_1')$ entsprechenden Erdmeridians liegt.
Bezeichnen wir die Länge, Breite*) und Höhe über der Mee-
fläche des Punktes $(x_1y_1z_1)$ respective durch ω_1, Ω_1, h_1; so ist,
man mit Hülfe der Theorie der Ellipse oder einiger allgemein
nten Formeln der höheren Geometrie leicht findet, in völliger
gemeinheit:

*) Worunter hier nicht die sogenannte geocentrische Breite, sondern
mehr die Polhöhe verstanden wird.

$$6)\quad \begin{cases} x_1' = \cos\omega_1 . \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}, \\ y_1' = \sin\omega_1 . \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}, \\ z_1' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \Omega_1 . \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}. \end{cases}$$

Wegen der Gleichung 1) ist aber

$$\frac{x_1'^2 + y_1'^2}{a^2} + \frac{z_1'^2}{b^2} = 1,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung mit der dritten der hergehenden Gleichungen verbindet:

$$7)\quad \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} = \frac{a^2 \cos\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}.$$

Also ist nach den Gleichungen 6):

$$8)\quad \begin{cases} x_1' = \dfrac{a^2 \cos\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ y_1' = \dfrac{a^2 \sin\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ z_1' = \dfrac{b^2 \sin\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}; \end{cases}$$

und folglich, wenn man

$$9)\quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

setzt:

$$10)\quad \begin{cases} x_1' = \dfrac{a \cos\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ y_1' = \dfrac{a \sin\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ z_1' = \dfrac{a(1-e^2) \sin\Omega_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\Omega_1^2}}. \end{cases}$$

Da nun aber offenbar

$$h_1 \cos\omega_1 \cos\Omega_1,\ h_1 \sin\omega_1 \cos\Omega_1,\ h_1 \sin\Omega_1$$

die Coordinaten des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ in Bezug auf ein durc Punkt $(x_1' y_1' z_1')$ gelegtes, dem Systeme der xyz paralleles dinatensystem sind, so überzeugt man sich mittelst der einfac Formeln aus der Lehre von der Verwandlung der Coordinat

der Stelle von der Richtigkeit der folgenden ganz allgemein gültigen Ausdrücke:

$$11)\quad \begin{cases} x_1=(h_1+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}})\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ y_1=(h_1+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}})\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ z_1=(h_1+\dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}})\sin\Omega_1; \end{cases}$$

mittelst welcher die rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1, z_1 ohne grosse Schwierigkeit aus ω_1, Ω_1, h_1 berechnet werden können. Man könnte diese Formeln auch auf verschiedene Arten zur numerischen Rechnung bequemer einrichten und wegen der Kleinheit von e zweckmässige Näherungsformeln aus denselben ableiten, wobei wir aber jetzt nicht verweilen wollen.

Die Gleichungen der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Vertikale sind nach 5) und 10), wie man leicht findet:

$$12)\quad \begin{cases} y=x\,\mathrm{tang}\,\omega_1, \\ z=x\,\dfrac{\mathrm{tang}\,\Omega_1}{\cos\omega_1}-\dfrac{ae^2\sin\Omega_1}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1{}^2}} \end{cases}$$

Ist nun

$$13)\quad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

die Gleichung der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Horizontalebene, welche auf der diesem Punkte entsprechenden Vertikale senkrecht steht, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$B=A\,\mathrm{tang}\,\omega_1,\quad C=A\frac{\mathrm{tang}\,\Omega_1}{\cos\omega_1};$$

also

$$\frac{A}{B}=\frac{\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\sin\omega_1\cos\Omega_1},\quad \frac{A}{C}=\frac{\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\sin\Omega_1};$$

und man ist folglich offenbar

$$14)\quad \begin{cases} A=\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ B=\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ C=\sin\Omega_1 \end{cases}$$

gesetzen berechtigt, wo dann

$$15)\quad A^2+B^2+C^2=1$$

ist. Die Gleichung der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Horizontalebene ist aber nach dem Vorhergenden

16) $(x-x_1)\cos\omega_1\cos\Omega_1+(y-y_1)\sin\omega_1\cos\Omega_1+(z-z_1)\sin\Omega_1=0$

oder

17) $(x-x_1)\cos\omega_1+(y-y_1)\sin\omega_1+(z-z_1)\operatorname{tang}\Omega_1=0.$

§. 3.

Es sei jetzt

18) $Mx+Ny+Kz+L=0$

die Gleichung einer beliebigen Ebene, und m,n,k seyen die Coordinaten eines Punktes in derselben. Durch diesen Punkt seien in der in Rede stehenden Ebene zwei auf einander senkrechte gerade Linien und eine auf der Ebene senkrecht stehende gerade Linie gezogen. Jede dieser drei geraden Linien wird durch den Punkt (mnk) in zwei Theile getheilt, und für einen dieser beiden Theile sollen bei jeder der drei Linien die Bestimmungswinkel in Bezug auf das System der xyz durch α,β,γ; $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$; $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ bezeichnet werden.

Die Gleichungen der ersten und zweiten Linie sind:

19) $$\begin{cases}\dfrac{x-m}{\cos\alpha}=\dfrac{y-n}{\cos\beta}=\dfrac{z-k}{\cos\gamma},\\[2ex] \dfrac{x-m}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-n}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-k}{\cos\gamma_1}.\end{cases}$$

Weil der Punkt (mnk) in der gegebenen Ebene liegt, so ist

20) $Mm+Nn+Kk+L=0,$

und folglich

21) $M(x-m)+N(y-n)+K(z-k)=0$

die Gleichung der gegebenen Ebene. Also hat man nach 19) und 21) die beiden folgenden Gleichungen:

22) $$\begin{cases}M\cos\alpha+N\cos\beta+K\cos\gamma=0,\\ M\cos\alpha_1+N\cos\beta_1+K\cos\gamma_1=0.\end{cases}$$

Weil aber die beiden durch die Gleichungen 19) charakterisirten Linien auf einander senkrecht stehen, so ist

23) $\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0,$

und ausserdem hat man die bekannte Gleichung

24) $\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2=1.$

Mit Hülfe der drei Gleichungen

$$25)\quad \left\{\begin{array}{c} M\cos\alpha_1+N\cos\beta_1+K\cos\gamma_1=0,\\ \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0,\\ \cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2=1 \end{array}\right.$$

nn man α_1, β_1, γ_1 aus α, β, γ und M, N, K finden, indem man rch Auflösung dieser drei Gleichungen in Bezug auf $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ als unbekannte Grössen sehr leicht die folgenden Formeln, denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, hält:

$$26)\quad \cos\alpha_1=\pm\frac{N\cos\gamma-K\cos\beta}{\sqrt{(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos\beta_1=\pm\frac{K\cos\alpha-M\cos\gamma}{\sqrt{(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\pm\frac{M\cos\beta-N\cos\alpha}{\sqrt{(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2}}.$$

Weil aber

$$\begin{aligned}&(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2\\ &=M^2(\cos\beta^2+\cos\gamma^2)+N^2(\cos\gamma^2+\cos\alpha^2)+K^2(\cos\alpha^2+\cos\beta^2)\\ &-2(MN\cos\alpha\cos\beta+NK\cos\beta\cos\gamma+KM\cos\gamma\cos\alpha)\end{aligned}$$

nd

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

t, so ist

$$\begin{aligned}&(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2\\ &=M^2\sin\alpha^2+N^2\sin\beta^2+K^2\sin\gamma^2\\ &-2(MN\cos\alpha\cos\beta+NK\cos\beta\cos\gamma+KM\cos\gamma\cos\alpha).\end{aligned}$$

Wegen der ersten der beiden Gleichungen 22) ist aber

$$\begin{aligned}0&=M^2\cos\alpha^2+N^2\cos\beta^2+K^2\cos\gamma^2\\ &+2(MN\cos\alpha\cos\beta+NK\cos\beta\cos\gamma+KM\cos\gamma\cos\alpha),\end{aligned}$$

d folglich, wenn man diese Gleichung zu der vorhergehenden rt:

$$\begin{aligned}&(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2\\ &=M^2+N^2+K^2.\end{aligned}$$

Also ist nach 26) mit Beziehung der obern und untern Zeichen f einander:

$$27)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \pm\dfrac{N\cos\gamma - K\cos\beta}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\beta_1 = \pm\dfrac{K\cos\alpha - M\cos\gamma}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\gamma_1 = \pm\dfrac{M\cos\beta - N\cos\alpha}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der in dem Punkte (mnk) auf der gegebenen Ebene senkrecht stehenden geraden Linie, welcher die Bestimmungswinkel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ entsprechen, sind

$$28)\quad \frac{x-m}{\cos\alpha_2} = \frac{y-n}{\cos\beta_2} = \frac{z-k}{\cos\gamma_2},$$

und nach den Principien der analytischen Geometrie hat man die folgenden Gleichungen:

$$29)\quad \begin{cases} M\cos\beta_2 = N\cos\alpha_2, \\ N\cos\gamma_2 = K\cos\beta_2, \\ K\cos\alpha_2 = M\cos\gamma_2; \end{cases}$$

von denen jede eine Folge aus den beiden andern ist. Mit Hülfe dieser Gleichungen und der bekannten Gleichung

$$30)\quad \cos\alpha_2^2 + \cos\beta_2^2 + \cos\gamma_2^2 = 1$$

erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander leicht:

$$31)\quad \begin{cases} \cos\alpha_2 = \pm\dfrac{M}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\beta_2 = \pm\dfrac{N}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\gamma_2 = \pm\dfrac{K}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 27) und 31) erhält man auch leicht die folgenden Formeln, in denen sich die obern und untern Zeichen ebenfalls auf einander beziehen:

$$32)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \pm(\cos\beta\cos\gamma_2 - \cos\gamma\cos\beta_2), \\ \cos\beta_1 = \pm(\cos\gamma\cos\alpha_2 - \cos\alpha\cos\gamma_2), \\ \cos\gamma_1 = \pm(\cos\alpha\cos\beta_2 - \cos\beta\cos\alpha_2). \end{cases}$$

§. 4.

Wir wollen nun annehmen, dass O_1, O_2, O_3 drei Punkte auf der Erde sind, deren Längen, Breiten und Höhen über der Meeresfläche wir respective durch

$$\omega_1,\ \Omega_1,\ h_1;\quad \omega_2,\ \Omega_2,\ h_2;\quad \omega_3,\ \Omega_3,\ h_3$$

bezeichnen. Die den Punkten O_1, O_2 entsprechenden Grössen

$$\omega_1,\ \Omega_1,\ h_1;\quad \omega_2,\ \Omega_2,\ h_2$$

werden als bekannt angenommen, und es kommt nun darauf an, aus denselben mit Hülfe geodätischer Messungen die dem Punkte O_3 entsprechenden Grössen ω_3, Ω_3, h_3 abzuleiten.

Zu dem Ende messen wir mit dem Theodoliten in dem Punkte O_1 die horizontale Projection E_1 des 180° nicht übersteigenden Winkels $\overline{O_2O_1O_3}$ und den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel J_1 der Linie $\overline{O_1O_3}$ gegen die durch O_1 gelegte Horizontalebene, und eben so in dem Punkte O_2 die horizontale Projection E_2 des 180° nicht übersteigenden Winkels $\overline{O_1O_2O_3}$ und den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel J_2 der Linie $\overline{O_2O_3}$ gegen die durch O_2 gelegte Horizontalebene; so haben wir alle Data, welche zur Bestimmung der Grössen ω_3, Ω_3, h_3, d. h. der Lage des Punktes O_3, erforderlich sind, wie nun gezeigt werden soll.

Bezeichnen wir nämlich die Coordinaten der Punkte O_1 und O_2 in dem Systeme der xyz durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2; so haben wir zu deren Bestimmung nach 11) die folgenden Formeln:

$$33)\quad \begin{cases} x_1=(h_1+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1^{\,2}}})\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ y_1=(h_1+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1^{\,2}}})\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ z_1=(h_1+\dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1^{\,2}}})\sin\Omega_1 \end{cases}$$

und

$$34)\quad \begin{cases} x_2=(h_2+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2^{\,2}}})\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\ y_2=(h_2+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2^{\,2}}})\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\ z_2=(h_2+\dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2^{\,2}}})\sin\Omega_2. \end{cases}$$

Hat man mittelst dieser Formeln die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 berechnet, so sind nach 16)

$$35)\quad (x-x_1)\cos\omega_1\cos\Omega_1+(y-y_1)\sin\omega_1\cos\Omega_1+(z-z_1)\sin\Omega_1=0$$

und

$$36)\quad (x-x_2)\cos\omega_2\cos\Omega_2+(y-y_2)\sin\omega_2\cos\Omega_2+(z-z_2)\sin\Omega_2=0$$

die Gleichungen der durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen, welche nun auch leicht entwickelt werden können.

Sind nun P, Q zwei Hülfswinkel, so hat man zur Berechnung der Linie

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

die folgenden Gleichungen:

$$37)\quad \begin{cases} x_1-x_2 = \overline{O_1O_2}\,.\cos P\cos Q, \\ y_1-y_2 = \overline{O_1O_2}\,.\sin P\cos Q, \\ z_1-z_2 = \overline{O_1O_2}\,.\sin Q; \end{cases}$$

mittelst welcher nach einem bekannten Verfahren $\overline{O_1O_2}$ immer leicht gefunden werden kann. Ist aber $\overline{O_1O_2}$ bekannt, so ergeben sich die Bestimmungswinkel φ_1, ψ_1, χ_1 und φ_2, ψ_2, χ_2 der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ in Bezug auf das System der xyz leicht mittelst der Formeln

$$38)\quad \cos\varphi_1 = \frac{x_2-x_1}{\overline{O_1O_2}},\quad \cos\psi_1 = \frac{y_2-y_1}{\overline{O_1O_2}},\quad \cos\chi_1 = \frac{z_2-z_1}{\overline{O_1O_2}}$$

und

$$39)\quad \cos\varphi_2 = \frac{x_1-x_2}{\overline{O_1O_2}},\ \cos\psi_2 = \frac{y_1-y_2}{\overline{O_1O_2}},\ \cos\chi_2 = \frac{z_1-z_2}{\overline{O_1O_2}}.$$

Bezeichnet man nun die Bestimmungswinkel der Projectionen der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ auf den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen in Bezug auf das System der xyz respective durch φ'_1, ψ'_1, χ'_1 und φ'_2, ψ'_2, χ'_2; so hat man zu deren Bestimmung nach den Formeln in der Abhandlung Nr. XXXVIII. I. in Theil VI. Heft III., wenn man die ihren absoluten Werthen nach 90° nicht übersteigenden Hülfswinkel μ_1 und μ_2 mittelst der Formeln

$$40)\quad \sin\mu_1 = \cos\omega_1\cos\Omega_1\cos\varphi_1 + \sin\omega_1\cos\Omega_1\cos\psi_1 + \sin\Omega_1\cos\chi_1$$

und

$$41)\quad \sin\mu_2 = \cos\omega_2\cos\Omega_2\cos\varphi_2 + \sin\omega_2\cos\Omega_2\cos\psi_2 + \sin\Omega_2\cos\chi_2$$

berechnet, die folgenden Formeln:

$$42)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_1 = \dfrac{\cos\varphi_1 - \sin\mu_1\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\psi'_1 = \dfrac{\cos\psi_1 - \sin\mu_1\sin\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\chi'_1 = \dfrac{\cos\chi_1 - \sin\mu_1\sin\Omega_1}{\cos\mu_1} \end{cases}$$

und

$$43)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_2 = \dfrac{\cos\varphi_2 - \sin\mu_2 \cos\omega_2 \cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\psi'_2 = \dfrac{\cos\psi_2 - \sin\mu_2 \sin\omega_2 \cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\chi'_2 = \dfrac{\cos\chi'_2 - \sin\mu_2 \sin\Omega_2}{\cos\mu_2}; \end{cases}$$

$$44)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_1 = \dfrac{\cos\varphi_1}{\cos\mu_1} - \operatorname{tang}\mu_1 \cos\omega_1 \cos\Omega_1, \\ \cos\psi'_1 = \dfrac{\cos\psi_1}{\cos\mu_1} - \operatorname{tang}\mu_1 \sin\omega_1 \cos\Omega_1, \\ \cos\chi'_1 = \dfrac{\cos\chi_1}{\cos\mu_1} - \operatorname{tang}\mu_1 \sin\Omega_1 \end{cases}$$

$$45)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_2 = \dfrac{\cos\varphi_2}{\cos\mu_2} - \operatorname{tang}\mu_2 \cos\omega_2 \cos\Omega_2, \\ \cos\psi'_2 = \dfrac{\cos\psi_2}{\cos\mu_2} - \operatorname{tang}\mu_2 \sin\omega_2 \cos\Omega_2, \\ \cos\chi'_2 = \dfrac{\cos\chi_2}{\cos\mu_2} - \operatorname{tang}\mu_2 \sin\Omega_2; \end{cases}$$

eren Vereinfachung durch Einführung von Hülfswinkeln wir icht aufhalten wollen.

Nun denke man sich in den durch O_1 und O_2 gelegten Hori-lebenen von O_1 und O_2 aus auf den Projectionen der Linien , und $\overline{O_2O_1}$ auf den in Rede stehenden Horizontalebenen senk- stehende Linien auf denselben Seiten dieser Projectionen, enen die Projectionen der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ auf den bei-Horizontalebenen liegen, gezogen, und bezeichne unter diesen ussetzungen die Bestimmungswinkel der beiden errichteten endikel in Bezug auf das System der xyz respective durch ψ_1'', χ_1'' und φ_2'', ψ_2'', χ_2''. Ferner denke man sich von den ten O_1 und O_2 aus zwei auf den durch dieselben gelegten zontalebenen senkrecht stehende Linien auf den Seiten dieser zontalebenen, auf welchen die Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ liegen, ge-n, und bezeichne deren Bestimmungswinkel in Bezug auf das em der xyz respective durch φ_1''', ψ_1''', χ_1''' und φ_2''', ψ_2''', χ_2'''. n hat man nach 31), 32), 35) die Gleichungen:

$$46)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1''' = \pm\cos\omega_1 \cos\Omega_1, \\ \cos\psi_1''' = \pm\sin\omega_1 \cos\Omega_1, \\ \cos\chi_1''' = \pm\sin\Omega_1 \end{cases}$$

$$47)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1'' = \pm(\cos\psi_1'\cos\chi_1''' - \cos\chi_1'\cos\psi_1'''), \\ \cos\psi_1'' = \pm(\cos\chi_1'\cos\varphi_1''' - \cos\varphi_1'\cos\chi_1'''), \\ \cos\chi_1'' = \pm(\cos\varphi_1'\cos\psi_1''' - \cos\psi_1'\cos\varphi_1'''); \end{cases}$$

und nach 31), 32), 36) hat man die Gleichungen:

$$48)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2''' = \pm\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\psi_2''' = \pm\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\chi_2''' = \pm\sin\Omega_2 \end{cases}$$

und

$$49)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2'' = \pm(\cos\psi_2'\cos\chi_2''' - \cos\chi_2'\cos\psi_2'''), \\ \cos\psi_2'' = \pm(\cos\chi_2'\cos\varphi_2''' - \cos\varphi_2'\cos\chi_2'''), \\ \cos\chi_2'' = \pm(\cos\varphi_2'\cos\psi_2''' - \cos\psi_2'\cos\varphi_2'''). \end{cases}$$

Bemerken wollen wir noch, dass sich, wie man leicht fi
die Formeln 47) und 49) auch auf folgende Art ausdrücken las

$$47^*)\quad \begin{cases} \cos\psi_1'' = \pm\dfrac{\cos\psi_1\sin\Omega_1 - \cos\chi_1\sin\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\psi_1'' = \mp\dfrac{\cos\varphi_1\sin\Omega_1 - \cos\chi_1\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\chi_1'' = \pm\dfrac{(\cos\varphi_1\sin\omega_1 - \cos\psi_1\cos\omega_1)\cos\Omega_1}{\cos\mu_1} \end{cases}$$

und

$$49^*)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2'' = \pm\dfrac{\cos\psi_2\sin\Omega_2 - \cos\chi_2\sin\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\psi_2'' = \mp\dfrac{\cos\varphi_2\sin\Omega_2 - \cos\chi_2\cos\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\chi_2'' = \pm\dfrac{(\cos\varphi_2\sin\Omega_2 - \cos\psi_2\cos\omega_2)\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}; \end{cases}$$

wo immer die obern und untern Zeichen sich auf einander bezie

Ob man in den vorhergehenden Formeln die obern oder
tern Zeichen zu nehmen hat, lässt sich in jedem einzelnen
nur aus einer besonderen Anschauung beurtheilen, und allgem
Regeln lassen sich darüber nicht geben. Da man übrigens
Richtung eines Theils der Axe der z, welche als der einem
Punkte auf der Erde entsprechenden Weltaxe*) parallel zu bet
ten ist, stets vor Augen hat, so wird sich immer leicht beur
len lassen, ob die Winkel χ_1'', χ_1''' und χ_2'', χ_2''' spitz oder st
sind, und daher wird immer auch leicht überhaupt über die Art, w
den vorhergehenden Gleichungen die Zeichen zu nehmen
eine bestimmte Entscheidung gegeben werden können.

*) Im Sinne der sphärischen Astronomie gesprochen.

Bezeichnen wir nun aber, in Bezug auf die Projectionen der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ auf den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen und die vorher auf diese Projectionen von $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ in den beiden Horizontalebenen und auf diese letzteren selbst von O_1 und O_2 aus errichteten Perpendikel als positive Theile zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme mit den Anfangspunkten O_1 und O_2, die Bestimmungswinkel der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ respective durch φ_1^{IV}, ψ_1^{IV}, χ_1^{IV} und φ_2^{IV}, ψ_2^{IV}, χ_2^{IV}; so ist unter den gemachten Voraussetzungen offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$50)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^{IV} = \cos E_1 \cos J_1, \\ \cos\psi_1^{IV} = \sin E_1 \cos J_1, \\ \cos\chi_1^{IV} = \sin J_1 \end{cases}$$

und

$$51)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2^{IV} = \cos E_2 \cos J_2, \\ \cos\psi_2^{IV} = \sin E_2 \cos J_2, \\ \cos\chi_2^{IV} = \sin J_2. \end{cases}$$

Bezeichnen endlich φ_1^{V}, ψ_1^{V}, χ_1^{V} und φ_2^{V}, ψ_2^{V}, χ_2^{V} die Bestimmungswinkel der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ in Bezug auf das System der xyz, so ist, wie leicht aus einem bekannten Satze der analytischen Geometrie erhellen wird:

$$52)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^{V} = \cos\varphi_1' \cos\varphi_1^{IV} + \cos\varphi_1'' \cos\psi_1^{IV} + \cos\varphi_1''' \cos\chi_1^{IV}, \\ \cos\psi_1^{V} = \cos\psi_1' \cos\varphi_1^{IV} + \cos\psi_1'' \cos\psi_1^{IV} + \cos\psi_1''' \cos\chi_1^{IV}, \\ \cos\chi_1^{V} = \cos\chi_1' \cos\varphi_1^{IV} + \cos\chi_1'' \cos\psi_1^{IV} + \cos\chi_1''' \cos\chi_1^{IV}; \end{cases}$$

und

$$53)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2^{V} = \cos\varphi_2' \cos\varphi_2^{IV} + \cos\varphi_2'' \cos\psi_2^{IV} + \cos\varphi_2''' \cos\chi_2^{IV}, \\ \cos\psi_2^{V} = \cos\psi_2' \cos\varphi_2^{IV} + \cos\psi_2'' \cos\psi_2^{IV} + \cos\psi_2''' \cos\chi_2^{IV}, \\ \cos\chi_2^{V} = \cos\chi_2' \cos\varphi_2^{IV} + \cos\chi_2'' \cos\psi_2^{IV} + \cos\chi_2''' \cos\chi_2^{IV}. \end{cases}$$

Nach dem Obigen kann man diese Formeln auch auf folgende Art ausdrücken:

$$54)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^{V} = \cos J_1 (\cos E_1 \cos\varphi_1' + \sin E_1 \cos\varphi_1'') + \sin J_1 \cos\varphi_1''', \\ \cos\psi_1^{V} = \cos J_1 (\cos E_1 \cos\psi_1' + \sin E_1 \cos\psi_1'') + \sin J_1 \cos\psi_1''', \\ \cos\chi_1^{V} = \cos J_1 (\cos E_1 \cos\chi_1' + \sin E_1 \cos\chi_1'') + \sin J_1 \cos\chi_1'''; \end{cases}$$

und

$$55)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2{}^{V} = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\varphi_2{}' + \sin E_2 \cos\varphi_2{}'') + \sin J_2 \cos\varphi \\ \cos\psi_2{}^{V} = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\psi_2{}' + \sin E_2 \cos\psi_2{}'') + \sin J_2 \cos\psi \\ \cos\chi_2{}^{V} = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\chi_2{}' + \sin E_2 \cos\chi_2{}'') + \sin J_2 \cos\chi \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel F_1, G_1, H_1 und F_2, G_2, mittelst der Formeln

$$56)\quad \tan F_1 = \frac{\cos\varphi_1{}'}{\cos\varphi_1{}''},\ \tan G_1 = \frac{\cos\psi_1{}'}{\cos\psi_1{}''},\ \tan H_1 = \frac{\cos\chi_1{}'}{\cos\chi_1{}''}$$

und

$$57)\quad \tan F_2 = \frac{\cos\varphi_2{}'}{\cos\varphi_2{}''},\ \tan G_2 = \frac{\cos\psi_2{}'}{\cos\psi_2{}''},\ \tan H_2 = \frac{\cos\chi_2{}'}{\cos\chi_2{}''};$$

so wird

$$58)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1{}^{V} = \cos J_1 \dfrac{\cos\varphi_1{}'' \sin(E_1 + F_1)}{\cos F_1} + \sin J_1 \cos\varphi_1{}''', \\ \cos\psi_1{}^{V} = \cos J_1 \dfrac{\cos\psi_1{}'' \sin(E_1 + G_1)}{\cos G_1} + \sin J_1 \cos\psi_1{}''', \\ \cos\chi_1{}^{V} = \cos J_1 \dfrac{\cos\chi_1{}'' \sin(E_1 + H_1)}{\cos H_1} + \sin J_1 \cos\chi_1{}''' \end{cases}$$

und

$$59)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2{}^{V} = \cos J_2 \dfrac{\cos\varphi_2{}'' \sin(E_2 + F_2)}{\cos F_2} + \sin J_2 \cos\varphi_2{}''', \\ \cos\psi_2{}^{V} = \cos J_2 \dfrac{\cos\psi_2{}'' \sin(E_2 + G_2)}{\cos G_2} + \sin J_2 \cos\psi_2{}''', \\ \cos\chi_2{}^{V} = \cos J_2 \dfrac{\cos\chi_2{}'' \sin(E_2 + H_2)}{\cos H_2} + \sin J_2 \cos\chi_2{}'''. \end{cases}$$

Berechnet man aber ferner die Hülfswinkel F_1', G_1', H_1' und F_2', G_2', H_2' mittelst der Formeln

$$60)\quad \begin{cases} \tan F_1{}' = \dfrac{\cos\varphi_1{}'' \sin(E_1 + F_1)}{\cos\varphi_1{}''' \cos F_1}, \\ \tan G_1{}' = \dfrac{\cos\psi_1{}'' \sin(E_1 + G_1)}{\cos\psi_1{}''' \cos G_1}, \\ \tan H_1{}' = \dfrac{\cos\chi_1{}'' \sin(E_1 + H_1)}{\cos\chi_1{}''' \cos H_1} \end{cases}$$

und

$$61)\quad \begin{cases} \tan F_2{}' = \dfrac{\cos\varphi_2{}'' \sin(E_2 + F_2)}{\cos\varphi_2{}''' \cos F_2}, \\ \tan G_2{}' = \dfrac{\cos\psi_2{}'' \sin(E_2 + G_2)}{\cos\psi_2{}''' \cos G_2}, \\ \tan H_2{}' = \dfrac{\cos\chi_2{}'' \sin(E_2 + H_2)}{\cos\chi_2{}''' \cos H_2}; \end{cases}$$

$$94)\quad \begin{cases} X_1 - x_1 = K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 - y_1 = K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 - z_1 = K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}; \end{cases}$$

$$95)\quad \begin{cases} X_0 = x_0 + K_0 \dfrac{\cos\alpha_0}{\sin w^2}, \\ Y_0 = y_0 + K_0 \dfrac{\cos\beta_0}{\sin w^2}, \\ Z_0 = z_0 + K_0 \dfrac{\cos\gamma_0}{\sin w^2} \end{cases}$$

$$96)\quad \begin{cases} X_1 = x_1 + K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 = y_1 + K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 = z_1 + K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}. \end{cases}$$

en wir

$$L_0 = (x_1 - x_0)\cos\alpha_0 + (y_1 - y_0)\cos\beta_0 + (z_1 - z_0)\cos\gamma_0,$$
$$L_1 = (x_0 - x_1)\cos\alpha_1 + (y_0 - y_1)\cos\beta_1 + (z_0 - z_1)\cos\gamma_1;$$

$$98)\quad \begin{cases} K_0 = L_0 + L_1\cos w, \\ K_1 = L_1 + L_0\cos w. \end{cases}$$

eichnen wir die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen von einander durch U, so lässt sich dieselbe leicht mittelst genden Formeln berechnen:

$$99)\quad \begin{cases} U\cos V\cos W = X_0 - X_1, \\ U\sin V\cos W = Y_0 - Y_1, \\ U\sin W = Z_0 - Z_1; \end{cases}$$

icht weiter erläutert zu werden braucht.

55) $$\begin{cases} \cos\varphi_2{}^V = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\varphi_2{}' + \sin E_2 \cos\varphi_2{}'') + \sin J_2 \cos\varphi_2{}''' \\ \cos\psi_2{}^V = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\psi_2{}' + \sin E_2 \cos\psi_2{}'') + \sin J_2 \cos\psi_2{}''' \\ \cos\chi_2{}^V = \cos J_2 (\cos E_2 \cos\chi_2{}' + \sin E_2 \cos\chi_2{}'') + \sin J_2 \cos\chi_2{}''' \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel F_1, G_1, H_1 und F_2, G_2, H_2 mittelst der Formeln

56) $$\tang F_1 = \frac{\cos\varphi_1{}'}{\cos\varphi_1{}''}, \quad \tang G_1 = \frac{\cos\psi_1{}'}{\cos\psi_1{}''}, \quad \tang H_1 = \frac{\cos\chi_1{}'}{\cos\chi_1{}''}$$

und

57) $$\tang F_2 = \frac{\cos\varphi_2{}'}{\cos\varphi_2{}''}, \quad \tang G_2 = \frac{\cos\psi_2{}'}{\cos\psi_2{}''}, \quad \tang H_2 = \frac{\cos\chi_2{}'}{\cos\chi_2{}''};$$

so wird

58) $$\begin{cases} \cos\varphi_1{}^V = \cos J_1 \dfrac{\cos\varphi_1{}'' \sin(E_1 + F_1)}{\cos F_1} + \sin J_1 \cos\varphi_1{}''', \\ \cos\psi_1{}^V = \cos J_1 \dfrac{\cos\psi_1{}'' \sin(E_1 + G_1)}{\cos G_1} + \sin J_1 \cos\psi_1{}''', \\ \cos\chi_1{}^V = \cos J_1 \dfrac{\cos\chi_1{}'' \sin(E_1 + H_1)}{\cos H_1} + \sin J_1 \cos\chi_1{}''' \end{cases}$$

und

59) $$\begin{cases} \cos\varphi_2{}^V = \cos J_2 \dfrac{\cos\varphi_2{}'' \sin(E_2 + F_2)}{\cos F_2} + \sin J_2 \cos\varphi_2{}''', \\ \cos\psi_2{}^V = \cos J_2 \dfrac{\cos\psi_2{}'' \sin(E_2 + G_2)}{\cos G_2} + \sin J_2 \cos\psi_2{}''', \\ \cos\chi_2{}^V = \cos J_2 \dfrac{\cos\chi_2{}'' \sin(E_2 + H_2)}{\cos H_2} + \sin J_2 \cos\chi_2{}'''. \end{cases}$$

Berechnet man aber ferner die Hülfswinkel F_1', G_1', H_1' und F_2', G_2', H_2' mittelst der Formeln

60) $$\begin{cases} \tang F_1{}' = \dfrac{\cos\varphi_1{}'' \sin(E_1 + F_1)}{\cos\varphi_1{}''' \cos F_1}, \\ \tang G_1{}' = \dfrac{\cos\psi_1{}'' \sin(E_1 + G_1)}{\cos\psi_1{}''' \cos G_1}, \\ \tang H_1{}' = \dfrac{\cos\chi_1{}'' \sin(E_1 + H_1)}{\cos\chi_1{}''' \cos H_1} \end{cases}$$

und

61) $$\begin{cases} \tang F_2{}' = \dfrac{\cos\varphi_2{}'' \sin(E_2 + F_2)}{\cos\varphi_2{}''' \cos F_2}, \\ \tang G_2{}' = \dfrac{\cos\psi_2{}'' \sin(E_2 + G_2)}{\cos\psi_2{}''' \cos G_2}, \\ \tang H_2{}' = \dfrac{\cos\chi_2{}'' \sin(E_2 + H_2)}{\cos\chi_2{}''' \cos H_2}; \end{cases}$$

d setzt, indem J eine positive Grösse bezeichnet, der Kürze gen

$$J^2=(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2$$

r, wie man hieraus mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$73)\quad \begin{cases} \cos\alpha_0^2+\cos\beta_0^2+\cos\gamma_0^2=1, \\ \cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2=1 \end{cases}$$

ht findet:

$$74)\quad J^2=1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2;$$

erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf nder:

$$75)\quad \begin{cases} \cos\varphi=\pm\dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}{J}, \\ \cos\psi=\pm\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{J}, \\ \cos\chi=\pm\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{J}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den von den beiden gegebenen geraden Linien geschlossenen, im Sinne der analytischen Geometrie genommen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch w, so ist bekanntlich

$$76)\quad \cos w=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

d man kann also die Gleichungen 75) auch auf folgende Art drücken:

$$77)\quad \begin{cases} \cos\varphi=\pm\dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}{\sin w}, \\ \cos\psi=\pm\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\sin w}, \\ \cos\chi=\pm\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\sin w}. \end{cases}$$

Berechnen wir aber die Hülfsgrössen R, G, H, wo R eine itive Grösse sein soll, auf bekannte Weise mittelst der Formeln:

$$78)\quad \begin{cases} R\cos G\cos H=\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1, \\ R\sin G\cos H=\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1, \\ R\sin H=\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1; \end{cases}$$

ist, wie man leicht findet:

$$79)\quad J=R,$$

und mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einan

$$80)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm\cos G\cos H, \\ \cos\psi = \pm\sin G\cos H, \\ \cos\chi = \pm\sin H. \end{cases}$$

Sind X_0, Y_0, Z_0 die Coordinaten des Durchschnittspunk gesuchten Linie mit der ersten der beiden gegebenen Lini haben wir nach 66) und 67) die Gleichungen

$$81)\quad \begin{cases} \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0} = \dfrac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0}, \\ \dfrac{X_0-\xi}{\cos\varphi} = \dfrac{Y_0-\eta}{\cos\psi} = \dfrac{Z_0-\zeta}{\cos\chi}; \end{cases}$$

also

$$82)\quad \begin{cases} Y_0-y_0 = \dfrac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}(X_0-x_0), \\ Y_0-\eta = \dfrac{\cos\psi}{\cos\varphi}(X_0-\xi) \end{cases}$$

und

$$83)\quad \begin{cases} Z_0-z_0 = \dfrac{\cos\gamma_0}{\cos\alpha_0}(X_0-x_0), \\ Z_0-\zeta = \dfrac{\cos\chi}{\cos\varphi}(X_0-\xi). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ergieb durch Elimination von Y_0 und Z_0 leicht:

$$84)\quad \begin{cases} \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{(\xi-x_0)\cos\psi-(\eta-y_0)\cos\varphi}{\cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi}, \\ \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{(\xi-x_0)\cos\chi-(\zeta-z_0)\cos\varphi}{\cos\alpha_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\varphi}; \end{cases}$$

also, wie hieraus ferner leicht folgt:

$$85)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\psi)(\xi-x_0) \\ &+(\cos\gamma_0\cos\varphi-\cos\alpha_0\cos\chi)(\eta-y_0) \\ &+(\cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi)(\zeta-z_0) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man

$$86)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta_1\cos\chi-\cos\gamma_1\cos\psi)(\xi-x_1) \\ &+(\cos\gamma_1\cos\varphi-\cos\alpha_1\cos\chi)(\eta-y_1) \\ &+(\cos\alpha_1\cos\psi-\cos\beta_1\cos\varphi)(\zeta-z_1) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Sehr leicht erhält man nun mittelst der Gleichungen 76) und und der Gleichungen 73) die folgenden Ausdrücke:

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\psi &= \mp\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w}{\sin w},\\ \cos\gamma_0\cos\varphi-\cos\alpha_0\cos\chi &= \mp\frac{\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w}{\sin w},\\ \cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi &= \mp\frac{\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w}{\sin w}\end{aligned}\right.$$

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta_1\cos\chi-\cos\gamma_1\cos\psi &= \pm\frac{\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w}{\sin w},\\ \cos\gamma_1\cos\varphi-\cos\alpha_1\cos\chi &= \pm\frac{\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w}{\sin w},\\ \cos\alpha_1\cos\psi-\cos\beta_1\cos\varphi &= \pm\frac{\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w}{\sin w};\end{aligned}\right.$$

kann also die Gleichungen 85) und 86) auch auf folgende Art stellen:

$$89)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)(\xi-x_0)\\ +&(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)(\eta-y_0)\\ +&(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)(\zeta-z_0)\end{aligned}\right\}=0$$

$$90)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)(\xi-x_1)\\ +&(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)(\eta-y_1)\\ +&(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)(\zeta-z_1)\end{aligned}\right\}=0.$$

Denkt man sich nun, was offenbar verstattet ist, den Punkt (mit dem Punkte $(X_0\,Y_0\,Z_0)$ zusammenfallend, so hat man dem Obigen zur Bestimmung der Coordinaten X_0, Y_0, Z_0 drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\left.\begin{aligned} &(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)(X_0-x_1)\\ +&(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)(Y_0-y_1)\\ +&(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)(Z_0-z_1)\end{aligned}\right\}=0;$$

eben so hat man, wenn X_1, Y_1, Z_1 die Coordinaten des chnittspunkts der gesuchten Linie mit der zweiten der beigebenen Linien bezeichnen, zur Bestimmung dieser Coordie folgenden Gleichungen:

$$\frac{X_1-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{Y_1-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{Z_1-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)(X_1-x_0)\\+&(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)(Y_1-y_0)\\+&(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)(Z_1-z_0)\end{aligned}\right\}=0.$$

Diese beiden Systeme von Gleichungen kann man auch folgende Art ausdrücken:

$$\frac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)\{X_0-x_0-(x_1-x_0)\}\\+&(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)\{Y_0-y_0-(y_1-y_0)\}\\+&(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)\{Z_0-z_0-(z_1-z_0)\}\end{aligned}\right\}=0$$

und

$$\frac{X_1-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{Y_1-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{Z_1-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)\{X_1-x_1-(x_0-x_1)\}\\+&(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)\{Y_1-y_1-(y_0-y_1)\}\\+&(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)\{Z_1-z_1-(z_0-z_1)\}\end{aligned}\right\}=0;$$

und erhält nun mit Hülfe der Gleichung 76), wenn der Kürze w

91) $$\begin{aligned}K_0=&(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)(x_1-x_0)\\&+(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)(y_1-y_0)\\&+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)(z_1-z_0)\end{aligned}$$

und

92) $$\begin{aligned}K_1=&(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)(x_0-x_1)\\&+(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)(y_0-y_1)\\&+(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)(z_0-z_1)\end{aligned}$$

gesetzt wird, ohne Schwierigkeit die folgenden Ausdrücke.

93) $$\left\{\begin{aligned}X_0-x_0&=K_0\frac{\cos\alpha_0}{\sin w^2},\\Y_0-y_0&=K_0\frac{\cos\beta_0}{\sin w^2},\\Z_0-z_0&=K_0\frac{\cos\gamma_0}{\sin w^2}\end{aligned}\right.$$

$$94)\quad \begin{cases} X_1 - x_1 = K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 - y_1 = K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 - z_1 = K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}; \end{cases}$$

$$95)\quad \begin{cases} X_0 = x_0 + K_0 \dfrac{\cos\alpha_0}{\sin w^2}, \\ Y_0 = y_0 + K_0 \dfrac{\cos\beta_0}{\sin w^2}, \\ Z_0 = z_0 + K_0 \dfrac{\cos\gamma_0}{\sin w^2} \end{cases}$$

$$96)\quad \begin{cases} X_1 = x_1 + K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 = y_1 + K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 = z_1 + K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}. \end{cases}$$

etzen wir

$$\begin{cases} L_0 = (x_1 - x_0)\cos\alpha_0 + (y_1 - y_0)\cos\beta_0 + (z_1 - z_0)\cos\gamma_0, \\ L_1 = (x_0 - x_1)\cos\alpha_1 + (y_0 - y_1)\cos\beta_1 + (z_0 - z_1)\cos\gamma_1; \end{cases}$$

$$98)\quad \begin{cases} K_0 = L_0 + L_1\cos w, \\ K_1 = L_1 + L_0\cos w. \end{cases}$$

ezeichnen wir die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen n von einander durch U, so lässt sich dieselbe leicht mittelst lgenden Formeln berechnen:

$$99)\quad \begin{cases} U\cos V\cos W = X_0 - X_1, \\ U\sin V\cos W = Y_0 - Y_1, \\ U\sin W = Z_0 - Z_1; \end{cases}$$

icht weiter erläutert zu werden braucht.

55) $$\begin{cases} \cos\varphi_2^{V} = \cos J_2(\cos E_2\cos\varphi_2' + \sin E_2\cos\varphi_2'') + \sin J_2\cos\varphi_2 \\ \cos\psi_2^{V} = \cos J_2(\cos E_2\cos\psi_2' + \sin E_2\cos\psi_2'') + \sin J_2\cos\psi_2 \\ \cos\chi_2^{V} = \cos J_2(\cos E_2\cos\chi_2' + \sin E_2\cos\chi_2'') + \sin J_2\cos\chi_2 \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel F_1, G_1, H_1 und F_2, G_2, H_2 mittelst der Formeln

56) $$\tang F_1 = \frac{\cos\varphi_1'}{\cos\varphi_1''}, \quad \tang G_1 = \frac{\cos\psi_1'}{\cos\psi_1''}, \quad \tang H_1 = \frac{\cos\chi_1'}{\cos\chi_1''}$$

und

57) $$\tang F_2 = \frac{\cos\varphi_2'}{\cos\varphi_2''}, \quad \tang G_2 = \frac{\cos\psi_2'}{\cos\psi_2''}, \quad \tang H_2 = \frac{\cos\chi_2'}{\cos\chi_2''};$$

so wird

58) $$\begin{cases} \cos\varphi_1^{V} = \cos J_1\dfrac{\cos\varphi_1''\sin(E_1+F_1)}{\cos F_1} + \sin J_1\cos\varphi_1''', \\ \cos\psi_1^{V} = \cos J_1\dfrac{\cos\psi_1''\sin(E_1+G_1)}{\cos G_1} + \sin J_1\cos\psi_1''', \\ \cos\chi_1^{V} = \cos J_1\dfrac{\cos\chi_1''\sin(E_1+H_1)}{\cos H_1} + \sin J_1\cos\chi_1''' \end{cases}$$

und

59) $$\begin{cases} \cos\varphi_2^{V} = \cos J_2\dfrac{\cos\varphi_2''\sin(E_2+F_2)}{\cos F_2} + \sin J_2\cos\varphi_2''', \\ \cos\psi_2^{V} = \cos J_2\dfrac{\cos\psi_2''\sin(E_2+G_2)}{\cos G_2} + \sin J_2\cos\psi_2''', \\ \cos\chi_2^{V} = \cos J_2\dfrac{\cos\chi_2''\sin(E_2+H_2)}{\cos H_2} + \sin J_2\cos\chi_2''' \end{cases}$$

Berechnet man aber ferner die Hülfswinkel F_1', G_1', H_1' und F_2', G_2', H_2' mittelst der Formeln

60) $$\begin{cases} \tang F_1' = \dfrac{\cos\varphi_1''\sin(E_1+F_1)}{\cos\varphi_1'''\cos F_1}, \\ \tang G_1' = \dfrac{\cos\psi_1''\sin(E_1+G_1)}{\cos\psi_1'''\cos G_1}, \\ \tang H_1' = \dfrac{\cos\chi_1''\sin(E_1+H_1)}{\cos\chi_1'''\cos H_1} \end{cases}$$

und

61) $$\begin{cases} \tang F_2' = \dfrac{\cos\varphi_2''\sin(E_2+F_2)}{\cos\varphi_2'''\cos F_2}, \\ \tang G_2' = \dfrac{\cos\psi_2''\sin(E_2+G_2)}{\cos\psi_2'''\cos G_2}, \\ \tang H_2' = \dfrac{\cos\chi_2''\sin(E_2+H_2)}{\cos\chi_2'''\cos H_2}; \end{cases}$$

$$62)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1{}^{IV} = \dfrac{\cos\varphi_1{}^{III}\sin(J_1+F_1')}{\cos F_1'}, \\ \cos\psi_1{}^{IV} = \dfrac{\cos\psi_1{}^{III}\sin(J_1+G_1')}{\cos G_1'}, \\ \cos\chi_1{}^{IV} = \dfrac{\cos\chi_1{}^{III}\sin(J_1+H_1')}{\cos H_1'} \end{cases}$$

$$63)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2{}^{IV} = \dfrac{\cos\varphi_2{}^{III}\sin(J_2+F_2')}{\cos F_2'}, \\ \cos\psi_2{}^{IV} = \dfrac{\cos\psi_2{}^{III}\sin(J_2+G_2')}{\cos G_2'}, \\ \cos\chi_2{}^{IV} = \dfrac{\cos\chi_2{}^{III}\sin(J_2+H_2')}{\cos H_2'} \end{cases}$$

ie Gleichungen der Linien $\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_2O_3}$ nebst ihren Verlän-
gen über die Punkte O_1, O_2 hinaus sind nun

$$64)\quad \frac{x-x_1}{\cos\varphi_1{}^{IV}} = \frac{y-y_1}{\cos\psi_1{}^{IV}} = \frac{z-z_1}{\cos\chi_1{}^{IV}},$$

$$65)\quad \frac{x-x_2}{\cos\varphi_2{}^{IV}} = \frac{y-y_2}{\cos\psi_2{}^{IV}} = \frac{z-z_2}{\cos\chi_2{}^{IV}};$$

s kommt jetzt, um die Coordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes
dem Systeme der xyz zu finden, bloss auf die Bestimmung
oordinaten des Durchschnittspunktes der durch die Gleichun-
4) und 65) charakterisirten geraden Linien an, wozu eine be-
re Anleitung zu geben hier unnütze Weitläufigkeit sein würde,
lie analytische Geometrie alle dazu nöthigen Hülfsmittel dar-
. Da aber wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler
rch die Gleichungen 64) und 65) charakterisirten geraden
i sich in den meisten Fällen gar nicht schneiden werden, so
an auf die Art zu verfahren haben, dass man die Coordi-
X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 derjenigen Punkte der beiden
le stehenden geraden Linien bestimmt, welche den klein-
Abstand von einander haben, und dann die arithmetischen

$$\tfrac{1}{2}(X_1+X_2),\ \tfrac{1}{2}(Y_1+Y_2),\ \tfrac{1}{2}(Z_1+Z_2),$$

ie wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Coordinaten x_3,
s des Punktes O_3 betrachtet. Zugleich aber wird man auch
e die Grösse des Abstandes der beiden Punkte $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ und
Y_2Z_2) ermitteln, um ein Maas für die bei der Bestimmung der

$\frac{1}{n}$ $m$mal erfolgt ist, haben wir den Eindruck $a+\left(\frac{g}{n}\right).m=a+g\left(\frac{m}{n}\right)$ $=a+gt$. Indem wir aber den Ausdruck $a+gt$ unter der Voraussetzung jeder beliebigen Theilung der Zeiteinheit auffassen, entspricht ihm nur die Bewegung mit gleichförmiger Beschleunigung.

3) Hieraus ersehen wir zugleich, dass es einerlei ist, welche Anfangsgeschwindigkeit (a) der Körper schon hatte und dass die gleichförmig beschleunigende Kraft eine während ihrer ganzen Dauer sich gleichbleibende ist, daher wir sie am füglichsten eine constante nennen. Zugleich ist auch einleuchtend, dass das Beschleunigungsmaass g in dem Geschwindigkeitsausdrucke $a+gt$ das Maass der constanten Kraft sein kann. Wirken dann zwei constante Kräfte gleichzeitig auf einen Körper, so muss die daraus hervorgehende Mittelkraft ganz nach der Construction des Parallelogr: mmes beurtheilt werden. Denn man kann in der vorigen Betrachtung den Eindruck g auf beliebige Weise als Resultante zweier Seiteneindrücke denken, die unter jedwedem Winkel wirken können. So oft g sich wiederholt, substituire man dieselben Componenten, und so oft nur ein Theil von g gedacht wird, nehme man den gleichvielsten Theil der Componenten.

4) Indessen lässt sich die Vergleichung der stetig veränderten Bewegung mit einer solchen, in welcher die Veränderungen ruckweise erfolgen, für den gegenwärtigen Fall ganz umgehen, da man, gestützt auf die Relativität aller Bewegungen, die Bedeutung des Axiomes in §. 4. dahin erweitern kann, dass daraus unmittelbar die Bestimmungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung folgen. Man denke sich ein System von Körpern, denen irgend eine gemeinschaftliche Bewegung zukommt, so müssen wir die relativen Bewegungen in diesem Systeme gerade so beurtheilen, wie wenn dasselbe vollkommen ruhte, weil sonst für uns gar keine Beurtheilung der Bewegungen möglich wäre. Geben wir die Richtigkeit dieser Bemerkung auch nur für den Fall zu, dass die Bewegung des Systemes gleichförmig und geradlinig ist, so folgt doch auf der Stelle, mit Hilfe der Zusammensetzung der Bewegungen (§. 2.), dass es gleichgiltig ist, ob die Kraft einen ruhenden Körper in Bewegung setzt, oder ob derselbe eine Geschwindigkeit nach gleicher Richtung schon mitbrachte. Es muss daher auch die Kraft, welche die Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten um gleich viel vermehrt, eine constante sein, für deren Maass wir das Beschleunigungsmaass der Bewegung nehmen können.

5) Aber wir müssen das obige Princip noch allgemeiner auffassen. Denn da für die inneren Bewegungen Ruhe und gleichförmige Bewegung des Systemes gleichgiltig sind, so müssen jene inneren Bewegungen auch noch auf dieselbe Weise erfolgen, wenn das System bald ruht, bald sich wieder bewegt, wobei jede neu beginnende Bewegung mit jeder beliebigen Geschwindigkeit nach jeder beliebigen Richtung erfolgen darf. Darum aber muss jede progressive Bewegung des Systemes für seine inneren Bewegungen gleichgiltig sein. Allgemeiner noch kann man sagen, dass jedwede Bewegung des Systemes für seine inneren Bewegungen gleichgiltig ist, wenn die Bedingungen so gegeben sind, dass jeder Körper, an welche Stelle des Systemes man ihn auch setzen mag,

solche Bewegungen machen muss, vermöge deren er gegen alle übrigen Körper des Systemes in (relativer) Ruhe bleibt.

Denken wir uns nun ein Körpersystem in gleichförmig beschleunigter Bewegung unter der obigen Bedingung und geben wir einem dazu gehörigen Körper ebenfalls diese Art der Bewegung, so müssen wir die Kraft, welche die letztere (relative) in gleichen Zeiten um gleiche Geschwindigkeiten vermehrt, für constant halten, da für den Erfolg jeder Zustand des Systemes gleichgiltig ist. Aber eben desshalb muss ja auch die Kraft, welche dem Körper die mit dem Systeme gemeinschaftliche Bewegung mittheilt, eine constante sein. Aus beiden Bewegungen entsteht nach §. 2. eine dritte ebenfalls gleichförmig beschleunigte, und ihre Beschleunigungsmaasse liefern das der zusammengesetzten nach der Zeichnung des Parallelogrammes. Wir haben also zunächst nur ein Kräfteparallelogramm für den Fall, dass zwei constante Kräfte einen Körper nach immer parallelen Richtungen treiben, und eben auch das nur folgt aus Nr. 3.

§. 10.

1) Da nun bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung der Differentialquotient $\frac{dds}{dt^2}$ das Beschleunigungsmaass giebt, so ist derselbe zugleich auch das Maass der (constanten) Kraft. Jede andere ungleichförmige, aber stetige Bewegung lässt sich innerhalb bestimmter Zeitabschnitte um so genauer einer gleichförmig beschleunigten mit dem Beschleunigungsmaasse $\frac{dds}{dt^2}$ vergleichen, je kleiner die Zeitabschnitte sind, und desshalb sind wir berechtigt, den Differentialquotienten $\frac{dds}{dt^2}$ bei jeder Bewegung für das Maass der zur Zeit t statthabenden Kraft anzusehen. So wie nun aus der ungleichförmigen Bewegung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ folgen würde, wenn zur Zeit t alle weitere Einwirkung plötzlich nachlassen wollte: eben so würde auch die ungleichförmig beschleunigte Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte mit dem Beschleunigungsmaasse $\frac{dds}{dt^2}$ sich verwandeln, wenn von der Zeit t an die Intensität der Einwirkung sich gleich bleiben sollte.

Aus dieser Bedeutung der Kraft geht aber augenblicklich hervor, dass aus zwei Kräften p und p', auch wenn sie veränderlich sind, dennoch zu der Zeit, wo ihre Intensitäten p und p' sind, die dritte nach dem Gesetze des Parallelogrammes entsteht. Diese entsteht aber nur innerhalb eines Zeitdifferentials, so fern auch die Kräfte p und p' hinsichtlich ihrer Intensität und Richtung nur innerhalb eines Zeitdifferentials als constant gelten können.

Man darf das Maass einer Kraft nicht mit dem vergleichen wollen, was wir oben einen Eindruck nannten. Dass eine Kraft $= q$ sei, bedeutet, dass sie nach Verlauf einer Zeiteinheit dem Körper

eine Geschwindigkeit g mittheilen würde; dass aber ein Kö
den Eindruck g habe, hat den Sinn, dass derselbe sich mit
Geschwindigkeit g wirklich bewege. Beides lässt sich nich
Vergleichung bringen, obschon es möglich ist, dass der Eindr
g durch die Kraft g entstanden sein kann, was dann gerade n
Verlauf einer Zeiteinheit geschehen sein müsste. Es konnte a
auch der Eindruck g durch eine andere Kraft in jeder belie
kleinen Zeit entstanden sein, und wenn wir nun die Zeit des E
stehens unendlich klein denken, so müssen wir sagen, dass j
Kraft im Vergleich mit einem Eindrucke unendlich klein sei.
bei liegt also die Vergleichung der Geschwindigkeiten und
Zeiten ihres Entstehens zu Grunde, in der Weise, dass Kr
sich direct wie die Geschwindigkeiten und umgekehrt wie
Zeiten des Entstehens dieser Geschwindigkeiten verhalten.

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch zu Jena.

1) Wenn a, b und n ganze positive Zahlen bedeuten, so i

$$(a-b)_0\, b_n + (a-b+1)_1\,(b-1)_{n-1} + (a-b+2)_2\,(b-2)_{n-2} + \cdots = (a+1)_n,$$

also die Summe jener aus Binomialkoeffizienten-Produkten ge
deten Reihe unabhängig von b. Wie lässt sich diess mittelst
Satzes

$$(\alpha+\beta)_n = \alpha_0\,\beta_n + \alpha_1\,\beta_{n-1} + \alpha_2\,\beta_{n-2} + \cdots$$

beweisen?

2) Durch welche Substitution bringt man das Integral

$$\int \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-b^2x^2}}$$

auf die Form

$$\int \frac{d\varphi}{\alpha+\beta\cos\varphi},$$

welcher sein Werth gefunden werden kann.

3) Wie beweist man die Richtigkeit der Gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\tan\varphi}\, l\left(\frac{1+\tan\varphi}{1-\tan\varphi}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Wenn von einem Punkte O in der Ebene eines Vierecks $ABCD$ nach den Spitzen der vier Winkel desselben gerade Linien und zugleich die beiden Diagonalen dieses Vierecks gezogen sind, so ist immer der absolute Werth des Ausdrucks

$$\Delta AOD.\Delta BOC \pm \Delta AOB.\Delta COD,$$

in welchem das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, nachdem der Punkt O ausserhalb oder innerhalb des Vierecks liegt, dem Producte $\Delta AOC.\Delta BOD$ gleich.

Wenn wir $\sin(\sin x)$ durch $\sin^2 x$, $\sin(\sin^2 x)$ durch $\sin^3 x$, $\sin(\sin^3 x)$ durch $\sin^4 x$ u. s. w. bezeichnen, so ist der Werth, welchen der Bruch

$$\frac{x^{n-1}\sin^n x-(\sin x)^n}{x^{n+4}}$$

für $x=0$ erhält, der Grösse

$$\frac{n(n-1)}{36}$$

gleich, was durch Differentialrechnung oder auf eine andere Art zu erweisen ist.

Wenn A, B, C drei gegebene, in gerader Linie liegende Punkte sind, um den Punkt C ein Kreis beschrieben, und durch den Punkt B eine diesen Kreis in den Punkten D und E schneidende gerade Linie gezogen ist, so soll man die Lage dieser geraden Linie bestimmen, bei welcher die Sehne BD für ein in dem Punkte A befindliches Auge die grösste scheinbare Grösse hat.

Wenn ABC ein beliebiges ebenes Dreieck ist, und ausser der Summe oder Differenz der Seiten AB und AC auch noch die beiden den Winkel BAC und seine Nebenwinkel halbirenden, von dem Punkte A aus bis zu ihren Durchschnittspunkten D und E

mit der dem Punkte A gegenüberstehenden Seite BC des ecks und deren Verlängerung über B oder C hinaus gez geraden Linien AD und AE gegeben sind: das Dreieck A bestimmen.

Wenn O ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, Seiten und Winkel auf die in der Trigonometrie gewöhnliche bezeichnet werden, ist, und α, β, γ die Entfernungen des tes O von den Punkten A, B, C sind; so findet, wenn Fläche eines Dreiecks bezeichnet, dessen drei Seiten $\beta \sin B$, $\gamma \sin C$ sind, jederzeit die Gleichung

$$2a^2 \operatorname{cosec} A \sin B \sin C = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \pm$$

Statt, in welcher das obere oder das untere Zeichen zu n ist, jenachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb d das Dreieck ABC beschriebenen Kreises liegt.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei Seiten eines ecks und den um dasselbe beschriebenen Kreis berührt.

Die Relation zwischen den Wurzeln der beiden Gleic des dritten Grades:

$$x^3 - ax = b \text{ und } x^3 + ax^2 = b^2$$

zu finden.

Wenn zwischen einem Kreise, dessen Halbmesser r is drei andern Kreisen, deren Halbmesser r_1, r_2, r_3 sind, Ber gen von Aussen Statt finden, und d, d_1 die Entfernung Mittelpunkte der Kreise (r), (r_1) von der Centrallinie der (r_2) und (r_3) bezeichnen, so ist

$$\frac{r}{d} - \frac{r_1}{d_1} = 2.$$

(Für die Kugel ist die entsprechende Relation $\frac{\sin r}{\sin d} - \frac{\sin r_1}{\sin d_1} =$

XII.

Miscellen.

M. E. Bary, professeur de physique au collége de Charlemagne, adresse à l'Académie des sciences de Paris une note dans laquelle il fait connaître une nouvelle formule pour les tensions des vapeurs.

M. Bary propose de représenter les tensions de la vapeur d'eau au-dessous de 100° par la formule empirique

$$\log y = \log 760 - \frac{ax + bx^2}{c - x};$$

y est l'élasticité de la vapeur exprimée en millimètres de mercure à 0°; x est la température comptée en degrés centésimaux positivement au dessous de ce point. C'est la formule de Roche augmentée d'un terme en x^2. M. Bary croit cette modification nécessaire pour que la formule embrasse un intervalle de température un peu étendu. En calculant les constantes a, b, c, d'après les observations faites par M. Regnault à 75°, à 50° et à 25°, on obtient une expression qui reproduit fidèlement les expériences de ce physicien entre 100° et —32°. Cette formule logarithmique est plus simple et se prête à une extension plus grande que la formule exponentielle à cinq constantes imaginée par M. Biot et adoptée par M. Regnault.

L'auteur applique ensuite sa formule aux expériences de MM. Arago et Dulong sur les élasticités de la vapeur aqueuse entre 100° et 224°; puis il a recours à une autre modification de la formule de Roche, qui est plus commode dans le cas où c'est la température de la vapeur qui est l'inconnue. Faisant pour abréger $\log y = z$, il pose

$$x = \frac{Cz - Bz^2}{A - z};$$

y désigne la tension de la vapeur estimée en atmosphères de 0m, et x est la température comptée à partir de 100° positivement au-dessus de ce point. Les deux formules s'accordent aussi bien l'une que l'autre avec l'ensemble des observations de MM. Arago et Dulong; entre 100° et 140° environ elles sont un peu plus exactes que la formule *binôme* employée par ces physiciens. M. Bary justifie le choix de ses formules par des tableaux qui offrent les résultats de leur comparaison avec l'expérience.

L'auteur pense que les formules qu'il propose seraient susc
tibles de plusieurs autres applications. Il cite comme exemple
passage de la chaleur rayonnante à travers des lames solides
liquides dont on fait varier l'épaisseur. Soit l'équation

$$\log y = \log Y - \frac{ax + bx^2}{c + x},$$

où y est la quantité de chaleur transmise à une épaisseur vari
x, et Y la quantité de chaleur qui répond à $x = 0$. Il a tra
en nombres cette formule pour la chaleur qui rayonne d'une la
de Locatelli et qui traverse des lames de verre, de cristal
roche limpide, d'huile de colza, ou d'eau distillée, et il a cons
que la formule satisfait très bien à ces quatre séries d'observati
faites par M. Melloni. Cette interpolation, dit M. Bary,
moins pénible que celle de M. Biot, qui décompose le flux t
de chaleur en trois flux partiels, représente chacun d'eux par
intégrale définie, et ajoute ensuite ces trois intégrales.

Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel.

Von dem Herausgeber.

In Taf. I. Fig. 6. seien die sämmtlichen Seiten und Wi
des Dreiecks ABC und ausserdem die beiden an dem Punkt
liegenden Winkel ADC und BDC gegeben. Bezeichnen wir d
alle Seiten und Winkel so, wie es in der Figur geschehen
so ist

$$\varphi + \psi = C,$$

und nach den Principien der spärischen Trigonometrie haben

$$\sin\alpha : \sin\varphi = \sin a : \sin x,$$
$$\sin\beta : \sin\psi = \sin b : \sin y$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos c - \cos x \cos y}{\sin x \sin y}.$$

Setzen wir nun im Folgenden der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin a}, \quad \mu = \frac{\sin\beta}{\sin b};$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\sin\varphi = \lambda \sin x, \quad \sin\psi = \mu \sin y;$$

also

$$\lambda \sin x + \mu \sin y = 2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi),$$
$$\lambda \sin x - \mu \sin y = 2 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi);$$

d. i.

$$\lambda \sin x + \mu \sin y = 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi),$$
$$\lambda \sin x - \mu \sin y = 2 \cos \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi);$$

lglich

$$\sin x = \frac{\sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))}{\lambda}, \quad \sin y = \frac{\sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))}{\mu}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos x \cos y = \cos c - \cos(\alpha + \beta) \sin x \sin y$$

t, so erhält man, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung ndrirt und dann statt des Products $\cos x^2 \cos y^2$ das Product $(1 - \sin x^2)(1 - \cos y^2)$ einführt, nach einigen leichten Reductio- n die Gleichung:

$$\sin c^2 = \sin x^2 + \sin y^2 - 2 \cos c \cos(\alpha + \beta) \sin x \sin y - \sin(\alpha + \beta)^2 \sin x^2 \sin y^2,$$

. i. nach dem Obigen die Gleichung

$$\sin c^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))^2}{\lambda^2} + \frac{\sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))^2}{\mu^2} - \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi)) \sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))}{\lambda \mu} - \frac{\sin(\alpha + \beta)^2 \sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))^2 \sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))^2}{\lambda^2 \mu^2},$$

welche man leicht auf die Form

$$\sin c^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)\{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 + \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2\} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) - \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda \mu}\{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2\} - \frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2 \mu^2}\{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2\}$$

er nach gehöriger Entwickelung auf die Form

$$\sin c^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} - \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda \mu}\right) \sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda \mu}\right) \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) - \frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2 \mu^2} \sin \tfrac{1}{2} C^4 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^4$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4$$

$$+\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

bringt.

Dividiren wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

und setzen

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{1}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)^2},\quad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}$$

so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

$$A_1=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\},$$

$$B_1=-2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$C_1=2\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\}$$
$$-\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\}\cot\tfrac{1}{2}C^2$$

$$D_1=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\}\cot\tfrac{1}{2}C^2$$

gesetzt wird, zur Bestimmung von $\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ die folgende Gleichung des vierten Grades:

$$0=A_1+B_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)+C_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+B_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^3$$
$$+D_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4,$$

wobei man auch noch bemerken kann, dass sich der Coefficient C_1 wie man leicht findet, durch die Coefficienten A_1 und D_1 auf folgende Art ausdrücken lässt:

$$C_1=A_1+D_1-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2.$$

Am 14ten März 1845 starb zu London Dr. J. Fr. Daniell Prof. der Chemie am King's College, Secretair der Royal Society für das Ausland, u. A. durch seine Meteorological Essay's 1823. 3. edit. 1845. allgemein bekannt.

Die vom Minister Villemain bei den Kammern in Paris beantragte und von diesen beschlossene Sammlung und Herausgabe der Schriften von Fermat hat einen erfreulichen Fortgang genommen. Libri hat bei einem Antiquar in Metz eine bedeutende Anzahl Handschriften gefunden. Biographische Notizen sind eingesendet worden, nach denen Fermat nicht zu Toulouse, sondern zu Beaumont-de-Lomagne geboren ist. Auch in Deutschland hofft man noch Handschriften aufzufinden. Der Minister Salvandy hat die Herausgabe Libri übertragen (Jenaische allgemeine Literatur-Zeitung. 1845. Nr. 148. S. 590).

L'Académie des sciences de Paris a appris, qu'on vient de retrouver chez un libraire de Paris un des ouvrages perdus d'un géomètre du XVIIe siècle, Desargues, le contemporain et l'ami de Descartes, de Fermat et de Pascal. On a même l'espoir de retrouver d'autres ouvrages du même géomètre, tous perdus jusqu'ici, et qu'on ne connaissait que par le dire de différents auteurs qui en avaient parlé avec éloge. L'Académie a chargé sa commission administrative de faire l'acquisition de l'ouvrage retrouvé, et le ministre de l'instruction publique sera prié de faire faire des recherches pour tâcher de retrouver les autres ouvrages du même auteur, sur l'existence desquels on possède, à ce qu'il parait, quelques indices.

Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig hat den Einsendungstermin der Bearbeitungen der im Literarischen Bericht Nr. XVIII. S. 288. angezeigten Preisaufgabe bis Ende März 1846 verlängert und den Preis auf 48 Dukaten erhöhet. Die Adresse ist an den jedesmaligen Sekretär der Gesellschaft zu richten.

Einige Bemerkungen über die Abhandlung Thl. VI. Heft II. Nr. XXIX.

Aus einem Schreiben des Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg an den Herausgeber.

In dem vorher genannten Hefte des Archivs findet sich von Seite 187 an eine recht zierliche Entwickelung verschiedener bestimmter Integralien von Herrn Oberlehrer Arndt in Stralsund, deren Verständniss aber leider durch einige Druck- oder Schreibfehler etwas beeinträchtigt wird. Für den Fall, dass Sie dieselben vielleicht noch nicht von anderer Hand mitgetheilt erhalten haben, ist es Ihnen wohl angenehm, wenn ich sie hier anzeige, da die Abhandlung um ihres interessanten Inhalts willen gar sehr verdient, völlig correct gemacht zu werden.

Seite 187. Zeile 12 v. u. ergänze hinter dem Worte „verschwindet“ die Worte: „in so fern n eine ganze Zahl bedeutet“.

Seite 191. Zeile 8 v. u. statt $-\frac{1}{2}\pi^2\log 2(2m)^2$ lese
$-\frac{1}{2}\pi^2.4(2m-1)\log 2$.

Seite 192. Zeile 6 muss heissen:

$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2(2m+1)^2(\log 2-k\pi\sqrt{-1}.\frac{2m+2}{2m+1}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.\frac{2m}{2m+1}$$

Von hier an aber möchte der folgende Passus bis Zeile vielleicht besser so lauten:

„Daher ist jetzt

$$(12)\int_0^{n\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$
$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2n^2(\log 2-k\pi\sqrt{-1}.\frac{n\mp1}{n}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.\frac{n\pm1}{n}),$$

„wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n gera
„oder ungerade ist. Für $n=1$ erhält man sofort

$$(13)\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2(\log 2-2k\pi\sqrt{-1}),$$

„wie es sich auch aus (8) ergiebt, wenn man daselbst $m=0$ mach

Seite 193. Zeile 11 und 12 muss es statt $+(2\lambda+1)$ beide M
heissen $-(2\lambda+1)$.

Seite 193. Zeile 13 aber ist statt $-(2\lambda+1)$ zu setzen $+(2\lambda+$

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von dem Herrn Doctor Dippe,
Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

1.

In den Miscellen des Archivs (Thl. IV. S. 223) ist eine Auflösu der Aufgabe von der Trisection des Winkels mitgetheilt, welc von trigonometrischen Betrachtungen ganz unabhängig ist. führt auf die Gleichung

$$x^4+ax^3-3r^2x^2-2ar^2x+a^2r^2=0,$$

in welcher r den Radius eines Kreises bedeutet, in dessen Mit punkte der zu theilende Winkel seinen Scheitel hat, währen und x die zu dem Winkel und seinem dritten Theile gehören Sehnen in diesem Kreise sind. Ein Blick auf diese Gleich zeigt uns, dass $x=-a$ eine Wurzel derselben, die Gleich also durch $x+a$ theilbar ist. Man erhält mithin die Gleich dritten Grades

$$x^3-3r^2x+ar^2=0.$$

Ist der zu theilende Winkel $=2C$, so ist $a=2r\sin C$. $x=2r\sin\frac{1}{3}C$, und die Gleichung reducirt sich auf die bekannte

$$(\sin\tfrac{1}{3}C)^3-\tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{3}C+\tfrac{1}{4}\sin C=0.$$

2.

Die Gleichung $(\sin\frac{1}{3}C)^3-\frac{3}{4}\sin\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}\sin C=0$ wird in den elementaren Darstellungen der Trigonometrie gewöhnlich benutzt, um die Möglichkeit der Berechnung einer von Grad zu Grad fortschreitenden Tafel der Sinus nachzuweisen. Hat man nämlich aus den Eigenschaften der regelmässigen Vielecke $\sin 18^0$ und $\sin 15^0$ hergeleitet, so findet man leicht $\sin 3^0$, und kann nun auf jene Gleichung verweisen, deren Auflösung $\sin 1^0$ liefert.

Da diese Gleichung aber zum irreducibeln Falle gehört, so setzt ihre Lösung entweder die Benutzung trigonometrischer Tafeln, deren Berechnung erst nachgewiesen werden soll, oder die Entwickelung von $(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{3}}$ nach dem binomischen Lehrsatze, oder die Kenntniss der Auflösung höherer numerischer Gleichungen voraus. Die erste Art ist wegen des speciellen Zwecks der Lösung dieser Aufgabe auszuschliessen, die dritte wegen des Standpunktes der Lernenden. Es erhellet mithin die Nothwendigkeit, bei der Auseinandersetzung der kubischen Gleichungen den irreducibeln Fall auf dem zweiten Wege ebenfalls aufzulösen und sich nicht auf die goniometrische Lösung zu beschränken.

Unsere Gleichung bietet dann, wenn man $C=3^0$ setzt, ein vortreffliches Uebungsbeispiel dar, da die ersten Glieder der Reihen schon ein sehr genaues Resultat geben. Ihre drei Wurzeln sind

$$u+v,\ -\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i,\ -\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i;$$

worin

$$u=-\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}(1+i\tan C)^{\frac{1}{3}}.i \text{ und } v=+\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}(1-i\tan C)^{\frac{1}{3}}.i$$

sind, wie durch leichte Umformungen der Cardanischen Formel gefunden wird. Man erhält dann

$$u+v=(\cos C)^{\frac{1}{3}}\{B^{\frac{1}{3}}_1\tan C-B^{\frac{3}{3}}_1(\tan C)^3+B^{\frac{5}{3}}_1(\tan C)^5-..\},$$

$$\frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i=\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\{1-B^{\frac{2}{3}}_1(\tan C)^2+B^{\frac{4}{3}}_1(\tan C)^4-..\};$$

wo nach der bekannten Bezeichnungsweise

$$B^{k}_{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)....(\frac{1}{3}-(k-1))}{1.2.3....k}$$

ist. Bezeichnet man die erste Reihe mit P, die zweite mit Q, so sind die Wurzeln

$$P\sqrt[3]{\cos C},\ -\tfrac{1}{2}P\sqrt[3]{\cos C}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\cos C}.Q.$$

Setzt man nun $\sin C=\sin 3^0$, so sind die drei Wurzeln $\sin 1^0$, $\sin 59^0$ und $\sin -61^0$, wovon der Grund leicht einzusehen ist.

3.

In der mathematischen Theorie des Lichtes sind die goniometrischen Formeln

$$\sin x+\sin(x+z)+\sin(x+2z)\ldots+\sin(x+nz)=\frac{\sin(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{1}{2}z}$$

und

$$\cos x+\cos(x+z)+\cos(x+2z)\ldots+\cos(x+nz)=\frac{\cos(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{1}{2}z}$$

von der grössten Wichtigkeit. Die in den Supplementen zu Klügel's Wörterbuche (Thl. II. S. 636 ff.) gegebene Herleitung derselben zeichnet sich dadurch aus, dass sie direkt und elegant führt aber erst nach mancherlei Umformungen zu dem gewünschten Resultate. Als ich vor einiger Zeit die Beugungserscheinungen nach Schwerd durchging, der jene Formeln ohne Beweis hinstellt, fand ich folgende ganz leichte Ableitung derselben.

Aus den Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha^2-\sin\beta^2,$$
$$2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha-\sin 2\beta$$

ergeben sich leicht die bekannten Formeln

1) $\sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1)+\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\ldots$
$+\sin(\alpha_n+\alpha_{n+1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\sin(\alpha+\alpha_{n+1})\sin(\alpha-\alpha_{n+1})$

2) $\cos(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\ldots$
$+\cos(\alpha_n+\alpha_{n+1})\sin(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\cos(\alpha+\alpha_{n+1})\sin(\alpha-\alpha_{n+1})$

Setzt man in diesen $\alpha-\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2\ldots=\alpha_n-\alpha_{n+1}=\frac{z}{2}$, $\alpha+\alpha_1=x$, so erhält man $\alpha=\frac{x}{2}-\frac{z}{4}$, $\alpha_1=\frac{x}{2}+\frac{z}{4}$, $\ldots\alpha_{n+1}=\frac{x}{2}+\frac{nz}{2}$ und $\alpha+\alpha_1=x$, $\alpha_1+\alpha_2=x+z$, $\alpha_2+\alpha_3=x+2z,\ldots\alpha_n+\alpha_{n+1}=x+nz$, sowie $\alpha+\alpha_{n+1}=x+\frac{nz}{2}$, und $\alpha-\alpha_{n+1}=-\frac{(n+1)z}{2}$

Substituirt man diese Werthe in die Formeln (1) und (2) so erhält man

$$\sin\tfrac{z}{2}\cdot(\sin x+\sin(x+z)+\sin(x+2z)+\ldots+\sin(x+$$
$$=\sin(x+\tfrac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2},$$

$$\sin\tfrac{z}{2}\cdot(\cos x+\cos(x+z)+\cos(x+2z)+\ldots+\cos(x$$
$$=\cos(x+\tfrac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2},$$

raus die oben hingestellten Gleichungen sich ohne Weiteres geben.

4.

Scheuet man die Vermittelung des Imaginären nicht, so kann an die in der vorigen Bemerkung hergeleiteten Formeln auch auf lgendem Wege erhalten.

In der Progression

$$a+ae+ae^2....+ae^n=\frac{a(1-e^{n+1})}{1-e}$$

ze man

$$a=\cos x+i\sin x,\ e=\cos z+i\sin z;$$

n kommt sogleich

$$\{\cos x+\cos(x+z)+\cos(x+2z)+\cos(x+3z).....+\cos(x+nz)\}$$
$$+i\{\sin x+\sin(x+z)+\sin(x+2z)+\sin(x+3z)....+\sin(x+nz)\}$$
$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-\cos(n+1)z-i\sin(n+1)z)}{1-\cos z-i\sin z}.$$

Der Zähler der rechten Seite verwandelt sich sofort in

$$\cos x-\cos(x+(n+1)z)+i(\sin x-\sin(x+(n+1)z),$$

d dies in

$$2\sin\frac{(n+1)z}{2}\{\sin(x+\frac{n+1}{2}z)-i\cos(x+\frac{n+1}{2}z)\}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner der rechten Seite mit

$$1-\cos z+i\sin z,$$

wird der Zähler

$$2\sin\frac{n+1}{2}z\left\{\begin{array}{l}\sin(x+\frac{n+1}{2}z)-\sin(x+\frac{n-1}{2}z)\\+i(\cos(x+\frac{n-1}{2}z)-\cos(x+\frac{n+1}{2}z))\end{array}\right\},$$

der Nenner wird $4(\sin\frac{1}{2}z)^2$. Durch die leichteste Umformung lt man dann als Zähler des Ausdruckes auf der rechten Seite rer Gleichung

$$4\sin\frac{n+1}{2}z.\sin\frac{z}{2}\{\cos(x+\frac{nz}{2})+i\sin(x+\frac{nz}{2})\}.$$

Wird die Division mit dem Nenner $4(\sin\frac{1}{2}z)^2$ ausgeführt, so d unsere Gleichung

$$\{\cos x + \cos(x+z) + \ldots + \cos(x+nz)\}$$
$$+ i\{\sin x + \sin(x+z) + \ldots + \sin(x+nz)\}$$
$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}z \cdot \cos(x+\frac{nz}{2})}{\sin\frac{z}{2}} + i\frac{\sin\frac{n+1}{2}z \cdot \sin(x+\frac{nz}{2})}{\sin\frac{z}{2}},$$

aus welcher durch Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile die in Rede stehenden goniometrischen Formeln erhalten werden.

Mathematische Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen.

Fractiones continuae, in quas explicari possunt radices reales aequationum algebraicarum tertii altiorisve gradus, quae coefficientes habent rationales et ad gradum inferiorem reduci nequeunt, qualitates sine dubio habent similes illis, quas in aequationibus primi et secundi gradus cognitas habemus. Desinit quidem finita forma fractionum continuarum, ubi aequationes primum gradum excedunt, desinit periodicitas ultra secundum, sed pro hisce formis aliae exstare possunt explicationum genera, quae si bene cognita fuerint, ad analysin indeterminatam promovendam magnopere valeant. Proponimus itaque, ut inquiratur in propritates generales fractionum continuarum gradus altioris, saltem earum, quae illas, quas novimus, immediate sequuntur, id est, in quas explicari possunt radices cubicae irrationales quantorum rationalium, ita ut leges generales definiantur, quibus tam ipsarum fractionum quam seriei convergentium principalium terminos ad quemlibet usque ordinem computare liceat sine ulla praevia determinatione terminorum omnium antecedentium.

In quaestionibus tractandis sermone Latino, Gallico, Anglico, Germanico, Suecico, Danicove uti licebit. Commentationes notandae erunt non nomine scriptoris, sed tessera aliqua, adjiciendaque charta obsignata, eadem tessera notata, quae scriptoris nomen, ordinem domiciliumque indicet. (Preis 50 Dänische Ducaten. Einlieferungstermin vor Ausgang des August 1846. Adresse an den Sekretair der Akademie, Herrn Professor Johann Christian Örsted.)

XIII.

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Erster Theil.

§. 1.

Begriff der geometrischen Verwandtschaft.

a) Sind in einer Ebene $\mathfrak{E}$ (Taf. II. Fig. 1.) irgend zwei Punkte B, B' gegeben, so bestimmt ein jeder andere Punkt $\mathfrak{a}$ dieser Ebene zwei Gerade a, a', welche den letzteren mit B, B' verbinden, und umgekehrt: je zwei Strahlen a, a' der Punkte B, B' bestimmen einen, und zwar im Allgemeinen auch nur einen einzigen Punkt $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$, und nur diejenigen zwei Strahlen derselben, welche zusammenfallen, haben nicht bloss einen, sondern unzählige Punkte gemein. Jeder unendlich entfernte Punkt bestimmt zwei parallele Strahlen, und umgekehrt. Irgend ein System von Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... bestimmt zwei Strahlbüschel B, B', deren Strahlen a, b, c, d....; a', b', c', d'.... paarweise nach jenen Punkten gehen, und diese Strahlbüschel sind in Ansehung dieser Strahlenpaare perspektivisch oder überhaupt projektivisch, jenachdem jenes System von Punkten einer geraden Linie A oder einem Kegelschnitte K, welcher durch die Punkte B, B' geht, angehört, und umgekehrt (Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 4. und 11.). Insbesondere bestimmen sämmtliche unendlich entfernte Punkte von $\mathfrak{E}$ zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B'.

b) Sind andererseits in einer Ebene $\mathfrak{E}$ irgend zwei Gerade A, A' gegeben, so bestimmt eine jede andere Gerade a dieser

Ebene zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, in welchen sie die ersteren schne und umgekehrt: je zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ der Geraden A, A' bes men eine Gerade a der Ebene $\mathfrak{E}$, und nur diejenigen zwei Pu derselben, welche sich im Durchschnitte von A, A' vereini gehören unzähligen Geraden zugleich an. Jede mit A (oder parallele Gerade geht nach dem unendlich entfernten Punkte A (A'), und eine in $\mathfrak{E}$ unendlich entfernt liegende Gerade nach den unendlich entfernten Punkten von A und A', und u kehrt. Irgend ein System von Geraden $a, b, c, d....$ bestimmt A, A' zwei Punktenschaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'....$, un sind die Geraden A, A' in Ansehung dieser letzteren persp visch oder projektivisch überhaupt, jenachdem erstere durch ei lei Punkt B gehen oder einen Kegelschnitt K umhüllen, wel auch A, A' zu Tangenten hat, und umgekehrt. Insbesondere stimmt jeder unendlich entfernte Punkt B zwei projectivisch- liche Gerade A, A'.

c) Betrachtet man jetzt irgend zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und d sich in der einen, $\mathfrak{E}$, zwei Strahlbüschel B, B' oder zwei rade A, A', und in der anderen, $\mathfrak{E}_1$, zwei Strahlbüschel B_1, B_1' zwei Gerade A_1, A_1' dergestalt gegeben, dass immer das eine Gel der einen Ebene mit einem Gebilde der anderen, und das an der ersten mit dem anderen der zweiten projektivisch ist, d. h bestimmter zu reden, dass

entweder α) $B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....)$ und zugleic
$B'(a', b', c', d'....) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....)$;

oder β) $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....)$ und
$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{b}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'.. .)$;

oder γ) $B(a, b, c, d....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....)$ und
$B'(a', b', c', d'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....)$

ist, so bestimmt im Falle α) ein jeder Punkt $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ Strahlen a, a' der Strahlbüschel B, B', diese wieder bestim zwei und zwar nur zwei Strahlen a_1, a_1', welche denselben in Strahlbüscheln B_1, B_1' entsprechen, und diese im Allgeme einen einzigen Punkt $\mathfrak{a}_1$ der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird Punkt $\mathfrak{a}$ durch den Punkt $\mathfrak{a}_1$ bestimmt.

Im Falle β) bestimmt eine jede Gerade a der Ebene $\mathfrak{E}$ Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ der Geraden A, A'; diese wieder bestimmen z und zwar nur zwei ihnen entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1'$ der G den A_1, A_1', und diese im Allgemeinen eine einzige Gerad der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird die Gerade a durch die Ge a_1 bestimmt.

Im Falle γ) bestimmt jeder Punkt $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei St len a, a' der Strahlbüschel B, B', diese bestimmen die ihnen sprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1'$ der Geraden A_1, A_1', und letztere Allgemeinen eine einzige Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgek wird der Punkt $\mathfrak{a}$ durch die Gerade a_1 bestimmt.

d) Zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ können also mittels projektivis Gebilde auf drei wesentlich verschiedene Arten auf einander b gen werden: entweder nämlich entspricht im Allgemeinen

α) einem jeden Punkte und einem jeden Systeme von Punkten der einen Ebene ein bestimmter Punkt und ein bestimmtes System von Punkten der anderen, und umgekehrt: ersterer den letzteren; oder

β) einer jeden Geraden und einem jeden Systeme von Geraden der einen Ebene eine bestimmte Gerade und ein bestimmtes System von Geraden der anderen; und umgekehrt: ersterer den letzteren; oder

γ) einem jeden Punkte und einem jeden Systeme von Punkten der einen Ebene eine bestimmte Gerade und ein bestimmtes System von Geraden der anderen, und umgekehrt: ersterer den letzteren.

Zwei auf irgend eine von diesen drei Arten auf einander bezogene Ebenen, sowie auch je zwei entsprechende Systeme ihrer Elemente, heissen, in Ansehung der zwei Paar projektivischen Gebilde B, B_1 und B', B_1', oder A, A_1 und A', A_1', oder B, A_1 und B', A_1', geometrisch verwandt (oder auch bloss verwandt), und diese Beziehung selbst die geometrische Verwandtschaft derselben.

§. 2.

Besondere Fälle.

Die weitere Eintheilung der geometrischen Verwandtschaften geht, wie bereits die so eben erhaltene, unmittelbar aus den, im Wesen der projektivischen Beziehungen überhaupt gegebenen Unterschieden hervor. Namentlich bieten sich drei verschiedene Gesichtspunkte dar, von denen die beiden ersteren alle drei Fälle α), β), γ), der dritte dagegen nur die Fälle α) und β) betreffen:

1) Nach der projektivischen Beziehung der den Gebilden beider Ebenen gemeinschaftlichen Elemente auf einander.

Entweder nämlich *a*) entspricht das den Gebilden der einen Ebene gemeinschaftliche Element dem den Gebilden der anderen Ebene gemeinschaftlichen Elemente in keiner Beziehung, d. h. weder insofern ersteres zu dem einen, noch insofern es zu dem anderen Gebilde gerechnet wird; *b*) oder ersteres entspricht dem letzteren nur insofern jenes zu dem einen Gebilde gerechnet wird; oder *c*) beide entsprechen sich in beiderlei Hinsicht.

2) Jenachdem die Ebenen aufeinander liegen oder nicht. Im ersten Falle können die gegebenen zwei Paare projektivischer Gebilde beide oder auch nur das eine schief, perspektivisch, oder aber aufeinander oder concentrisch, und insbesondere involutorisch liegen, und es entstehen die Fragen: ob und wieviele Paare entsprechender Elemente sich vereinigen? ob und wieviele Paare einander in doppeltem Sinne entsprechen?

3) Nach der projektivischen Beschaffenheit der gegebenen Gebilde; d. h. jenachdem beide Paare oder nur das eine projektivisch überhaupt, oder projektivisch-ähnlich oder projektivisch-gleich sind.

Im Folgenden wird der erste Gesichtspunkt vorherrschend die Ordnung der Betrachtung bestimmen, und daher werden zuvörderst die beiden unter 1. *a*) und 1. *b*) begriffenen Verwandtschaftsarten, welche wir die höheren nennen wollen, und im zweiten Theil dieser Abhandlung die dritte Art, welche unter den Namen der Collineation und Reciprocität bekannt ist, in Untersuchung gezogen werden.

§. 3.

Bestimmtheit zweier und vermittelte Beziehung mehrerer geometrisch verwandter Systeme aufeinander.

Da nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 2. das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier proj. Gebilde vollkommen bestimmt ist, wenn irgend drei dieser Paare beliebig gegeben sind, so muss auch, was unmittelbar einleuchtet:

1) Die geometrische Verwandtschaft zweier Ebenen vollkommen und auf einzige Weise bestimmt sein, wenn in jeder die beiden Punkte oder Geraden B, B': A, A' und B_1, B_1'; A_1, A_1', und ausserdem irgend drei Paar entsprechende Elemente der beiden Ebenen gegeben sind.

2) Man kann in zwei Ebenen die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier Paare projektivischer Gebilde und ausserdem drei Elementenpaare beliebig annehmen und sodann festsetzen: die Ebenen sollen in Ansehung der ersteren geometrisch verwandt, und die letzteren sollen entsprechende Elementenpaare derselben sein.

3) Von zwei geometrisch verwandten Systemen ist das eine vollkommen bestimmt, wenn das andere System und die Verwandtschaft ihrer Ebenen vollkommen bestimmt ist.

4) Ist in einer Ebene irgend ein System von Punkten oder Geraden gegeben, so kann man in dieser Ebene die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier Gebilde nebst drei Elementen jenes Systems, und in einer zweiten Ebene die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier mit den ersteren projektivischer Gebilde nebst drei Elementen beliebig annehmen und sodann festsetzen: diese drei Elemente sollen einem zweiten Systeme angehören, welches mit dem ersten in Ansehung jener Gebilde geometrisch verwandt sei, und zwar sollen sie jenen drei Elementen des ersten Systems entsprechen.

Ferner ergibt sich aus Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 5. unmittelbar der folgende Satz:

5) Sind in einer beliebigen Anzahl von Ebenen ebensoviele Systeme von Punkten oder Geraden in bestimmter Ordnung gegeben, und ist der Reihe nach ein jedes dieser Systeme mit dem ihm zunächst folgenden geometrisch verwandt, so ist ein jedes derselben mit jedem, und namentlich auch das erste mit dem letzten geometrisch verwandt.

Erste Art
der höheren geometrischen Verwandtschaften.

α.
Zwei Systeme von Punkten.

§. 4.

Denkt man sich in der Ebene $\mathfrak{E}$ (Taf. II. Fig. 1.) zwei Strahlbüschel B, B', und in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B_1' dergestalt gegeben, dass

$$B(a,b,c,d....) = B_1(a_1,b_1,c_1,d_1....) \text{ und}$$
$$B'(a',b',c',d'..) = B_1'(a_1',b_1',c_1',d_1'..),$$

und dass dem gemeinschaftlichen Strahle P'' von B, B' sowohl insofern er zu B gehört, ein solcher Strahl P_1' in B_1, als auch insofern er zu B' gehört, ein solcher Strahl P_1 in B_1' entspreche, welcher nicht mit dem gemeinschaftlichen Strahle P_1'' von B_1, B_1' zusammenfällt, so werden auch umgekehrt dem letzteren, P_1'', in den Strahlbüscheln B, B' resp. zwei von P'' verschiedene Strahlen P', P entsprechen müssen; und wird der Durchschnitt von P, P' mit B'', und der Durchschnitt von P_1, P_1' mit B_1'' bezeichnet, so wird allen Punkten von P'' ein einziger Punkt der Ebene $\mathfrak{E}_1$, nämlich B_1'', und dem Punkte B'' ein jeder Punkt der Geraden P_1'' in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, und umgekehrt. Ferner entspricht jedem Punkte p von P derjenige Punkt in $\mathfrak{E}_1$, in welchem der dem P entsprechende Strahl von B_1', d. i. P_1'', den dem p entsprechenden Strahl von B_1, d. i. p, schneidet, also immer ein und derselbe Punkt B_1; und gleicherweise entspricht jedem Punkte von P' ein und derselbe Punkt B_1', u. s. w.

Die drei Punkte B, B', B'' und B_1, B_1', B_1'' werden Hauptpunkte, und die drei Geraden P, P', P'' und P_1, P_1', P_1'' werden Hauptlinien, und die von denselben gebildeten Dreiecke Hauptdreiecke genannt; und zwar heissen sowohl je zwei Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'', als auch je ein Hauptpunkt und eine Hauptlinie B, P_1; B', P_1'; B'', P_1''; B_1, P; B_1', P'; B_1'', P'', und endlich die Hauptdreiecke selbst zugeordnet.

Sind die drei Paar zugeordneten Hauptpunkte von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gegeben, so kennt man von jedem der beiden Paare proj. Strahlbüschel B, B_1 und B', B_1' zwei Paar entsprechende Strahlen; also lässt sich jetzt der Satz 1) des §. 3. dergestalt aussprechen:

1) Die geometrische Verwandtschaft zweier Ebenen ist vollkommen und auf einzige Weise bestimmt, sobald ihre drei Paar zugeordneten Hauptpunkte und irgend ein Paar entsprechende Punkte derselben gegeben sind; und auf ähnliche Weise die Sätze 2), 3), 4) desselben §.

Ist in $\mathfrak{E}$ irgend eine Gerade A gegeben, deren Punkte a, b, c, b.. die Strahlen $a, b, c, d..$; $a', b', c', d'....$ in B, B' bestimmen, und

sind $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$; $a_1', b_1', c_1', d_1' \ldots$ die den letzteren in B_1, B_1' entsprechenden Strahlen, so hat man:

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1..) = B(a, b, c, d....) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}..) \equiv B'(a', b', c', d'..)$$
$$= B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....),$$

also auch

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....).$$

Geht nun A durch den Hauptpunkt B'', so fallen in B_1, B_1' zwei entsprechende Strahlen mit dem gem. Strahle P_1'' zusammen; nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 8. entspricht also der Geraden A eine Gerade A_1. In jedem anderen Falle dagegen, wo die Strahlbüschel B_1, B_1' schiefliegend sind, entspricht der A ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die Punkte B_1, B_1' und zugleich durch den Punkt B_1'' geht, der dem Durchschnitte von A und P'' entspricht (Nr. XXX. 11.).

Denkt man sich nun die beliebig liegende A als den perspektivischen Durchschnitt zweier Strahlbüschel B, B'', so entsprechen den letzteren in $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B_1'', deren Strahlen sich paarweise auf dem Kegelschnitte $[A_1]$ schneiden, welche also unter sich und demnach mit jedem der Strahlbüschel B, B'' projektivisch sind. Also entspricht nicht nur jedem Strahlbüschel B, B', sondern auch jedem Strahlbüschel B'' ein demselben projektivisches B_1''.

Sind die Strahlen zweier Strahlbüschel B, B' paarweise parallel, so sind letztere projektivisch-gleich (§. 1. *a*), also sind auch die denselben entsprechenden Strahlbüschel B_1, B_1' projektivisch und bestimmen einen Kegelschnitt R_1, welcher durch B_1, B_1', B_1'' geht, und da einem jeden Kegelschnitte $[A_1]$, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, auch umgekehrt eine Gerade A entsprechen muss, so liegen alle unendlich entfernten Punkte von $\mathfrak{E}$ in einer einzigen geraden Linie. Dem Kegelschnitte R_1 steht übrigens ein anderer, R, in der Ebene $\mathfrak{E}$ zur Seite, welcher der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}_1$ entspricht. Hat die Gerade A mit R zwei, nur einen oder keinen Punkt gemein, so hat auch der Kegelschnitt $[A_1]$ mit der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}_1$ resp. zwei, nur einen oder keinen Punkt gemein, d. h. er ist eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse.

2) In zwei geometrisch verwandten Ebenen entspricht *a*) jedem Punkte einer Hauptlinie ein einziger Punkt, nämlich der dieser Linie zugeordnete Hauptpunkt; *b*) jedem Hauptpunkte die sämmtlichen Punkte der ihm zugeordneten Hauptlinie; *c*) jedem Strahle eines Hauptpunktes ein bestimmter Strahl des ihm zugeordneten Hauptpunktes; *d*) einem jeden Strahlbüschel eines Hauptpunktes ein demselben projektivischer Strahlbüschel des zugeordneten Hauptpunktes.

3) Einer beliebigen Geraden A der einen Ebene entspricht in der anderen ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, und insbesondere entspricht der unendlich entfernten Geraden einer jeden von beiden Ebenen ein eigenthümlicher Kegel-

schnitt R_1, R, welcher durch die drei Hauptpunkte geht.

4) Einem jeden Kegelschnitte der einen Ebene, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, entspricht eine bestimmte Gerade der anderen Ebene.

5) Der Kegelschnitt $[A_1]$ ist entweder eine Hyperbel, oder eine Parabel oder eine Ellipse, jenachdem die Gerade A mit dem Kegelschnitte R zwei, oder nur einen oder keinen Punkt gemein hat.

Da endlich jeder Kegelschnitt C, welcher nur durch zwei Hauptpunkte B, B' geht, zwei proj. Strahlbüschel B, B' bestimmt, deren entsprechende, B_1, B_1', ebenfalls projektivisch sein müssen, hier aber die Strahlen P_1, P_1' sich nicht entsprechen können, da die B, B' keine vereinigten entsprechenden Strahlen (P'') besitzen, so folgt ferner:

6) Einem jeden Kegelschnitte C der einen Ebene, welcher bloss durch zwei Hauptpunkte geht, entspricht auch in der anderen ein Kegelschnitt C_1, welcher bloss durch die beiden zugeordneten Hauptpunkte geht; und dieser ist eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse, jenachdem ersterer den Kegelschnitt R in zwei neuen Punkten schneidet, in einem neuen Punkte berührt oder nur in jenen zwei Hauptpunkten trifft.

§. 5.

Es sei S_1'' diejenige Gerade von $\mathfrak{E}_1$, welche den mit $[A_1]$ bezeichneten Kegelschnitt im Hauptpunkte B_1'' berührt; so entspricht derselben derjenige Strahl S'' in $\mathfrak{E}$, welcher der Geraden A in keinem ausserhalb P'' gelegenen Punkte begegnet; denn schnitte S'' die A ausserhalb P'' in einem Punkte $\mathfrak{n}$, so müsste auch S_1'' mit $[A_1]$ einen Punkt $\mathfrak{n}_1$ gemein haben, welcher nicht in B_1'' fiele, könnte also auch nicht Tangente in B_1'' sein. Auf die nämliche Weise, oder auch noch einfacher, lässt sich zeigen, dass den Geraden, welche den mit C_1 bezeichneten Kegelschnitt in den beiden Hauptpunkten B_1, B_1' berühren, diejenigen Geraden entsprechen, welche die Hauptpunkte B, B' resp. mit den Durchschnitten von C und P, P' verbinden.

Wird dagegen der Kegelschnitt $[A_1]$ oder C_1 von einer Geraden D_1, welche durch keinen Hauptpunkt geht, in einem Punkte $\mathfrak{n}_1$ berührt, so entspricht letzterer ein Kegelschnitt $[D]$, welcher seinerseits mit der Geraden A auch nur einen Punkt und resp. mit dem Kegelschnitte C, ausser den Hauptpunkten B, B', auch nur einen Punkt $\mathfrak{n}$ gemein hat. Ist $\mathfrak{n}_1$ insbesondere der Durchschnitt von C_1 und P_1, so hat der Kegelschnitt $[D]$ mit C eine gemeinschaftliche Tangente in B, welche dem Strahle $B_1\mathfrak{n}_1$ entspricht.

1) Geht ein Kegelschnitt durch die drei Hauptpunkte der einen Ebene, so entsprechen den drei Geraden, welche denselben in diesen Punkten berühren, diejenigen Strahlen der zugeordneten Hauptpunkte, welche nach den Durchschnitten der zugeordneten Hauptlinien

und der jenem Kegelschnitte entsprechenden Geraden gehen.

2) Geht ein Kegelschnitt bloss durch zwei Hauptpunkte der einen Ebene, so entsprechen den zwei Geraden, welche ihn in diesen Punkten berühren, diejenigen Strahlen der zugeordneten Hauptpunkte, welche nach den Durchschnitten der zugeordneten Hauptlinien und des dem ersteren entsprechenden Kegelschnittes gehen.

3) Jeder anderen Tangente des unter 1) oder 2) genannten Kegelschnittes entspricht ein Kegelschnitt, welcher die dem ersteren entsprechende Gerade oder den entsprechenden Kegelschnitt berührt, und zwar sind die Berührungspunkte ebenfalls entsprechende Punkte. Im zweiten Falle berühren sich die beiden Kegelschnitte in dem zugeordneten Hauptpunkte, wenn der Berührungspunkt jener Tangente auf einer Hauptlinie liegt.

§. 6.

Denkt man sich einen Hauptpunkt B als den Mittelpunkt zweier involutorischer Strahlbüschel B, B^0, deren zugeordnete Strahlenpaare a, a^0; b, b^0; c, c^0.... heissen mögen, und sind a_1, $a_1{}^0$; b_1, $b_1{}^0$; c_1, $c_1{}^0$.... die denselben entsprechenden Strahlen zweier Strahlbüschel B_1, $B_1{}^0$, so hat man

$$B_1(a_1, b_1, c_1 \ldots a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 \ldots) = B(a, b, c \ldots a^0, b^0, c^0 \ldots) =$$
$$B^0(a^0, b^0, c^0 \ldots a, b, c \ldots) = B_1{}^0(a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 \ldots a_1, b_1, c_1 \ldots); \text{ also}$$
$$\text{auch } B_1(a_1, b_1, c_1 .. a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 ..) = B_1{}^0(a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 .. a_1, b_1, c_1 ..),$$

d. h. die Strahlbüschel B_1, $B_1{}^0$ sind gleichfalls involutorisch (Nr. XXX. §. 1. *a*). Und da den Hauptstrahlen der einen Involution, d. h. in denen zwei zugeordnete Strahlen sich vereinigen, offenbar wiederum zwei vereinigte Paare zug. Strahlen der anderen Involution oder deren Hauptstrahlen entsprechen, und da die Hauptstrahlen mit je zwei zugeordneten harmonisch sind, so folgt:

1) In zwei geometrisch verwandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Strahlen, deren Mittelpunkt ein Hauptpunkt ist, wiederum eine Involution von Strahlen, und zwar sind die Hauptstrahlen beider Involutionen entsprechende Strahlen.

2) Je vier harmonischen Strahlen eines Hauptpunktes entsprechen vier harmonische Strahlen des zugeordneten Hauptpunktes. Und daher

3) Entspricht einer jeden Involution von Punkten, deren Richtungslinie durch einen Hauptpunkt der Ebene geht, wiederum eine Involution von Punkten, und die Hauptpunkte beider Involutionen sind entsprechende Punkte.

4) Je vier harmonischen Punkten, welche mit einem Hauptpunkte der Ebene in gerader Linie liegen, entsprechen wiederum vier harmonische Punkte.

Enthält eine beliebige Gerade A eine Involution von Punkten a, α; b, β; c, γ...., so bestimmt dieselbe im Strahlbüschel B eine Involution von Strahlen; dieser entspricht in B_1 ebenfalls eine Involution von Strahlen, und diese schneidet den der A entsprechenden Kegelschnitt $[A_1]$ in den, den Punkten a, α; b, β; c, γ.... entsprechenden Punkten a_1, α_1; b_1, β_1; c_1, γ_1.... Nach Archiv. Theil IV. Nr. XXX. §§. 3. 4. gehen sämmtliche Sehnen $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$.... durch einerlei Punkt, und daher bilden, nach Nr. XXX. §. 3. 3, die Strahlenpaare, welche von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes $[A_1]$ nach den Punkten a_1, α_1; b_1, β_1; c_1, γ_1.... gehen, eine Involution von Strahlen. Die Punktenpaare, in welchen ein Kegelschnitt von den einzelnen Strahlen eines Strahlbüschels geschnitten wird, sollen eine Involution von Punkten dieses Kegelschnitts, und die Berührungspunkte zweier berührenden Strahlen sollen die Hauptpunkte dieser Involution heissen. Je zwei zugeordnete Punkte bilden mit den zwei Hauptpunkten vier harmonische Punkte des Kegelschnitts.

5) Einer jeden Involution von Punkten, deren Richtungslinie durch keinen Hauptpunkt geht, entspricht eine Involution von Punkten des jener Richtungslinie entsprechenden Kegelschnittes.

6) Je vier harmonischen Punkten, welche mit keinem Hauptpunkte in gerader Linie liegen, entsprechen vier harmonische Punkte des ihrer Geraden entsprechenden Kegelschnitts.

Denkt man sich endlich irgend eine Involution von Strahlen, so schneiden diese eine jede Gerade in einer Involution von Punkten; den ersteren entsprechen ebensoviele Kegelschnitte, welche ausser den drei Hauptpunkten noch einen Punkt gemein haben, und jedem Kegelschnitte, welcher durch diese drei Hauptpunkte geht, entspricht eine Gerade der ersten Ebene; also:

7) Einer jeden Involution von Strahlen, deren Mittelpunkt kein Hauptpunkt ist, entsprechen eine Schaar von Kegelschnitten, welche die drei Hauptpunkte und ausserdem einen vierten Punkt gemein haben, und zwar schneiden dieselben, paarweise geordnet, einen jeden dem Hauptdreiecke umschriebenen Kegelschnitt in einer Involution von Punkten.

8) Je vier harmonischen Strahlen, deren Mittelpunkt kein Hauptpunkt ist, entsprechen vier dem Hauptdreiecke umschriebene Kegelschnitte, welche noch einen vierten Punkt gemein haben, und diese schneiden einen jeden dem Hauptdreiecke umschriebenen Kegelschnitt in vier harmonischen Punkten.

§. 7.

Uebertragung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte auf Kegelschnitte.

Man denke sich in einer Ebene $\mathfrak{E}$ eine Schaar Kegelschnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$.., welche vier Punkte B, B', B'', O gemein haben.

und in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ vier Punkte B_1, B_1', B_1'', O_1 beliebig gewählt; so darf man festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' geometrisch verwandt, und O, O_1 sollen entsprechende Punkte derselben sein. Dies vorausgesetzt, so werden jenen Kegelschnitten ebensoviele Gerade in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, welche durch den Punkt O_1 gehen, und da nun unter diesen Geraden entweder zwei oder nur eine oder keine sind, welche den mit R_1 bezeichneten Kegelschnitt berühren, im zweiten Falle aber der Punkt O_1 auf R_1 liegen, also O unendlich entfernt sein muss, so ergibt sich aus §. 5. 3. der folgende Satz:

1) Unter allen Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben, befinden sich, wenn keiner dieser Punkte unendlich entfernt ist, entweder zwei Parabeln oder keine; widrigenfalls aber jedesmal eine Parabel, sobald bloss ein einziger von jenen vier Punkten unendlich entfernt ist.

Eine andere Schaar Kegelschnitte habe drei Punkte B, B', B'' und eine Tangente T gemein, so entsprechen denselben lauter Gerade, welche einen Kegelschnitt $[T_1]$ berühren. Dieser Kegelschnitt aber hat mit dem Kegelschnitte R_1 drei und folglich auch vier Punkte und demzufolge entweder vier oder keine Tangente gemein (Archiv. Thl. V. Nr. XVIII. §. 5. 6.); also.

2) Unter allen Kegelschnitten, welche drei Punkte und eine Tangente gemein haben, befinden sich entweder vier oder keine Parabeln.

Eine Schaar von Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$...., welche vier Punkte B, B', B'', p gemein haben, werden von einer Geraden A in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... geschnitten; B_1, B_1', B_1'', p_1 seien irgend vier Punkte einer anderen Ebene $\mathfrak{E}_1$, und es seien $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' verwandt und p, p_1 entsprechende Punkte derselben; so entsprechen jenen Kegelschnitten ebensoviele Gerade, welche durch den Punkt p_1 gehen, und der Geraden A ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte geht und von jenen Geraden in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, α_1; $\mathfrak{b}_1$, β_1; $\mathfrak{c}_1$, γ_1; $\mathfrak{d}_1$, δ_1...., welche den ersteren entsprechen, geschnitten wird. Da nun diese Punkte eine Involution von Punkten dieses Kegelschnittes bilden, so ergibt sich aus der Umkehrung des Satzes §. 6. 5. der bekannte Satz:

3) Eine Schaar von Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben, werden von einer beliebigen Geraden in einer Involution von Punkten geschnitten.

Es sei in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend ein Kegelschnitt C gegeben, welcher von einer Geraden P'' in zwei Punkten B, B' geschnitten wird, und durch einen beliebigen dritten Punkt B'' der Ebene gehen die Strahlen a'', b'', c'', d''...., welche C resp. in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... und P'' in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... schneiden; endlich seien die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... so bestimmt, dass $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ mit $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ mit $\mathfrak{b}$, β u. s. w. harmonisch sind. Jetzt denke man sich eine zweite Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit den Punkten B_1, B_1', B_1'' und setze fest, dass $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' u. s. w. verwandt seien. Dies vorausgesetzt, so entspricht dem Kegelschnitte C ....

Kegelschnitt C_1, welcher bloss durch die Hauptpunkte B_1, B_1' geht; den Strahlen a'', b'', c'', d''.... entsprechen Strahlen a_1'', b_1'', c_1'', d_1'',.... des dritten Hauptpunktes B_1'', und diese schneiden C_1 in Punktenpaaren α_1, α_1; β_1, β_1; γ_1, γ_1; δ_1, δ_1...., welche den früheren α, α; β, β; γ, γ; δ, δ.... entsprechen; den Punkten a', b', c', d'.... entspricht ein einziger Punkt B_1'', und sind nun noch a_1'', b_1'', c_1'', d_1''.... die den a'', b'', c'', d''.... entsprechenden Punkte, so sind auch B_1'', a_1'' mit a_1, α_1; B_1'', b_1'' mit β_1, β_1 u. s. w. harmonisch. Unter diesen Umständen aber liegen die Punkte a_1'', b_1'', c_1'', d_1''.... auf einer Geraden A_1, nämlich auf der harmonischen Polare des Punktes B_1'' für C_1; also liegen auch die Punkte a'', b'', c'', d''.... auf einem Kegelschnitte $[A]$, welcher durch B, B', B'' geht.

4) Wird ein Kegelschnitt und eine Sekante desselben von den Strahlen eines beliebigen Strahlbüschels geschnitten, so gehören sämmtliche Punkte, welche jedesmal zu den beiden Durchschnitten des Kegelschnittes und dem Punkte der Sekante den vierten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt bilden, einem neuen Kegelschnitte an, welcher mit dem ersteren jene Sekante gemein hat und durch den Mittelpunkt jenes Strahlbüschels geht.

Dieser Satz gilt zunächst nur für reelle Sekanten, lässt sich aber auch für ideale darthun. Uebrigens ist derselbe nur ein besonderer Fall des folgenden, welcher auch aus der Eigenschaft der harmonischen Polaren durch Uebertragung sich ergibt:

5) Werden eine Schaar von Kegelschnitten, welche vier Punkte B, B', B'', p gemein haben, von irgend einer Geraden ein jeder in zwei Punkten geschnitten, und man bestimmt in jedem einen neuen Punkt dergestalt, dass er mit diesen zwei Punkten und mit einem bestimmten der Punkte B, B', B'', p, z. B. mit p, als zugeordnetem, vier harmonische Punkte bildet, so liegen alle diese neuen Punkte auf einem und demselben Kegelschnitte, welcher durch die drei anderen Punkte B, B', B'' und ausserdem, wenn sie existiren, durch diejenigen zwei Punkte geht, in welchen jene Gerade die zwei Kegelschnitten jener Schaar berührt wird.

Endlich noch eine Uebertragung des Paskalschen Satzes: In der Ebene $\mathfrak{E}$ seien drei Punkte B, B', B'' und eine Gerade A mit sechs beliebigen Punkten a, b, c, d, e, f in bestimmter Ordnung gegeben; durch je zwei dieser Punkte, welche unmittelbar aufeinander folgen, und jedesmal durch die drei Punkte B, B', B'' sei ein Kegelschnitt, im Ganzen also sechs Kegelschnitte $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$, $[de]$, $[ef]$, $[fa]$ gelegt, und es seien p, q, r die vierten Punkte, welche resp. $[ab]$ und $[dc]$, $[bc]$ und $[ef]$, $[cd]$ und $[fa]$ gemein haben. Ist nun eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit $\mathfrak{E}$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' verwandt, so entspricht der Geraden A ein Kegelschnitt $[A_1]$ mit den Punkten a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1; jenen sechs Kegelschnitten die gleichnamigen Geraden a_1b_1, b_1c_1, c_1d_1, d_1e_1, e_1f_1, f_1a_1, und den Punkten p, q, r die Durchschnitte p_1, q_1, r_1 von a_1b_1 und d_1c_1, b_1c_1 und e_1f_1, c_1d_1 und f_1a_1. Bekanntlich aber liegen diese drei Punkte p_1, q_1, r_1 in einer

Geraden S_1; also liegen auch die drei Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in einem Kegelschnitte $[S]$, welcher durch B, B', B'' geht.

6) Sind auf einer Geraden sechs Punkte in bestimmter Ordnung und ausserdem irgend drei Punkte in der Ebene gegeben, und legt man durch diese drei letzteren und jedesmal durch zwei von jenen sechs Punkten, welche unmittelbar auf einander folgen, und insbesondere auch durch den ersten und letzten, einen Kegelschnitt, im Ganzen also sechs Kegelschnitte, so liegen sechs Punkte, nämlich jene drei Punkte der Ebene und diejenigen drei, in welchen der erste und vierte, der zweite und fünfte, der dritte und sechste Kegelschnitt von Neuem sich schneiden, auf einem und demselben Kegelschnitte.

§. 8.

Eigenschaften der höheren Curven.

Man versteht unter einer Curve der n^{ten} Ordnung ein jedes ebene System stetig aufeinander folgender Punkte, welches mit einer beliebigen Geraden im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein hat; eine jede Gerade, in welcher zwei stetig auf einander folgende Punkte eines solchen Systems sich vereinigen, heisst eine Tangente desselben. Andererseits versteht man unter einer Curve der n^{ten} Klasse ein jedes ebene System stetig aufeinander folgender Geraden, welches mit einem beliebigen Punkte im Allgemeinen und höchstens n Gerade gemein hat; ein jeder Punkt, von welchem zwei stetig auf einander folgende Gerade eines solchen Systems, die zusammenfallen, ausgehen, heisst ein Punkt desselben.

Es sei nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Curve $\mathfrak{C}$ der n^{ten} Ordnung gegeben, und es sei $\mathfrak{C}_1$ das derselben entsprechende System von Punkten der verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$; so entsprechen den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit einer der Hauptlinien P, P', P'' gemein hat, ebensoviele Punkte von $\mathfrak{C}_1$, welche aber in dem zug. Hauptpunkte B_1, B_1', B_1'' sich vereinigen. Das System $\mathfrak{C}_1$ besitzt also in jedem der drei Hauptpunkte einen n-fachen Punkt, d. h. einen Punkt, in welchem n unstetig aufeinander folgende Punkte sich vereinigen. Geht aber $\mathfrak{C}$ selber mehrmals durch einen Hauptpunkt, z. B. um sogleich jetzt der Betrachtung den höchsten Grad von Allgemeinheit zu geben, $p$mal durch B, $q$mal durch B' und $r$mal durch B'', so hat $\mathfrak{C}$ mit P nur $n-(q+r)$, mit P' nur $n-(p+r)$ und mit P'' nur $n-(p+q)$ Punkte ausser den Punkten B, B', B'' gemein, und folglich besitzt $\mathfrak{C}_1$ in B_1 nur einen $(n-(q+r))$fachen, in B_1' nur einen $(n-(p+r))$fachen und in B_1'' nur einen $(n-(p+q))$fachen Punkt.

Es sei A_1 irgend eine Gerade in $\mathfrak{E}_1$; so entspricht derselben in $\mathfrak{E}$ ein Kegelschnitt $[A]$, welcher durch die Punkte B, B', B'' geht, und dieser möge mit $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen m Punkte gemein haben, indem wir mit m irgend eine unbekannte, späterhin zu er-

mittelnde, ganze Zahl bezeichnen. Da nun derselbe mit $\mathfrak{C}$ bereits $p+q+r$ Punkte gemein hat, welche in den Hauptpunkten liegen, so sind der übrigen noch $m-(p+q+r)$. Diese letztere Anzahl von Punkten hat also auch die Gerade A_1 mit dem Systeme $\mathfrak{C}_1$ gemein, und zwar nicht mehr, weil jenen $p+q+r$ Punkten nur Punkte der Hauptlinien entsprechen, welche, da A_1 beliebig ist, nicht eben Durchschnitte von A_1 und $\mathfrak{C}_1$ sein müssen. Geht $\mathfrak{C}$ durch keinen Hauptpunkt, so ist $m-(p+q+r)=m$. Hieraus folgt zunächst:

1) Einer jeden Curve von bestimmter Ordnung entspricht wiederum eine Curve von bestimmter Ordnung, und diese besitzt, wenn die Ordnung der ersteren $=n$, im Allgemeinen in jedem der Hauptpunkte einen $n$fachen Punkt. Indessen wird die Ordnung der letzteren um $p+q+r$ Einheiten vermindert, wenn die erstere in den Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt besitzt, und zugleich besitzt dann jene in den Hauptpunkten nur einen $(n-(q+r))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(p+q))$fachen Punkt.

Offenbar ist die Zahl m irgend eine bestimmte Funktion von n, d. h.

$$m=F(n).$$

Aus demselben Grunde aber, weshalb einer Curve der $n$ten Ordnung mit einem p-, einem q- und einem $r$fachen Punkte, die in den Hauptpunkten liegen, eine Curve von der $(F_{(n)}-(p+q+r))$ten Ordnung entspricht, wird auch einer Curve der $k$ten Ordnung, welche in den Hauptpunkten einen $(n-(q+r))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(p+q))$fachen Punkt besitzt, eine Curve entsprechen müssen, deren Ordnung $=F_{(k)}-(3n-2(p+q+r))$ ist. In diesem Falle befindet sich die Curve $\mathfrak{C}_1$, wenn $k=m-(p+q+r)$, und derselben entspricht nothwendig die Curve $\mathfrak{C}$, deren Ordnung $=n$; also ist

$$F_{(k)}-(3n-2(p+q+r))=n, \text{ oder weil } p+q+r=m-k \text{ ist;}$$

$$F_{(k)}+2(m-k)=4n.$$

Setzt man

$$p=q=r=0, \text{ also } k=m,$$

so ist

$$F_{(m)}=4n, \text{ also auch}$$

$$F_{(k)}+2(m-k)=F_{(m)} \text{ oder}$$

$$F_{(k)}-2k=F_{(m)}-2m.$$

Die Zahl m hängt nur von n ab; ändert man also nur den Werth der Summe $p+q+r$, so bleibt $F_{(m)}-2m$ unverändert; folglich, wenn $p+q+r=m-1$ oder $k=1$ gesetzt wird, hat man

$$F_{(m)}-2m=F_{(1)}-2.$$

$F_{(1)}$ aber bedeutet die Zahl der Punkte, welche ein Kegelschnitt mit einer Curve der 1sten Ordnung, d. h. mit einer Geraden gemein hat, und diese Zahl ist $=2$; also ist

$$F_{(m)}=2m \text{ und ebenso}$$
$$F_{(n)}=2n.$$

Hieraus folgt zunächst:

2) Ein Kegelschnitt hat mit einer Curve der $n$ten Ordnung im Allgemeinen und höchstens $2n$ Punkte gemein. Ferner:

3) Einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht im Allgemeinen und höchstens eine Curve der $2n$ten Ordnung.

Auf ähnliche Weise wie wir zu diesen Sätzen gelangt sind, d. h. ohne die Theorie der höheren Gleichungen in Anspruch zu nehmen, lassen sich noch andere Eigenschaften der höheren Curven ableiten, welche sonst dieser Theorie ausschliesslich anzugehören scheinen. Die folgenden §§. liefern einige Beispiele.

§. 9.

Anzahl der Durchschnittspunkte zweier Curven.

Die Anzahl der gegenseitigen Durchschnittspunkte zweier Curven der $m$ten und der $n$ten Ordnung ist offenbar eine bestimmte Funktion der Zahlen m und n, also $=F_{(m,n)}$. Es seien nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Curven M und N, die eine von der $m$ten, die andere von der $n$ten Ordnung gegeben, und zwar habe die eine einen $(m-1)$fachen Punkt B, die andere einen $(n-1)$fachen Punkt B', eine Annahme, welche unserem Zwecke, die Zahl $F_{(m,n)}$ zu ermitteln, durchaus nicht hinderlich sein wird. Wählt man nun B, B' und irgend einen dritten Punkt B'', welcher keiner der beiden Curven angehört, zu Hauptpunkten von $\mathfrak{E}$, so entspricht der Curve M in $\mathfrak{E}_1$ eine Curve M_1, deren Ordnung $=2m-(m-1)=m+1$, und der Curve N eine Curve N_1, deren Ordnung $=n+1$ ist; die Anzahl der Durchschnittspunkte beider ist also $=F_{(m+1,n+1)}$. M_1 besitzt in B_1 einen $m$fachen, in B_1' und B_1'' einen einfachen Punkt, und N_1 besitzt in B_1' einen $n$fachen, in B_1 und B_1'' einen einfachen Punkt; also haben beide Curven in B_1 m Punkte, in B_1' n Punkte und in B_1'' einen Punkt gemein; und sie besitzen folglich ausser diesen Punkten nur noch $F_{(m+1,n+1)}-(m+n+1)$ gemeinschaftliche Punkte, welche allein den Durchschnitten von M, N entsprechen können. Die Anzahl der letzteren aber ist $F_{(m,n)}$; also ist

$$F_{(m+1,n+1)}-(m+n+1)=F_{(m,n)}$$

oder

$$F_{(m+1,n+1)}-F_{(m,n)}=m+n+1.$$

Setzt man hier der Reihe nach $m+1$, $m+2$.... $m+p-m$ statt m

und $n+1$, $n+2$.... $n+q-n$ statt n, wo $p-q=m-n$ ist, so erhält man die neuen Gleichungen:

$$F_{(m+2,n+2)}-F_{(m+1,n+1)}=m+n+3,$$
$$F_{(m+3,n+3)}-F_{(m+2,n+2)}=m+n+5;$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$F_{(p,q)}-F_{(p-1,q-1)}=m+n+2(p-m)-1.$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen und der ersten erhält man nun:

$$F_{(p,q)}-F_{(m,n)}=(p-m)(m+n)+(p-m)(p-m)=(p-m)(p+n).$$

Setzt man hier $n=1$, also $m=p-q+1$, so entsteht:

$$F_{(p,q)}-F_{(p-q+1,1)}=(q-1)(p+1).$$

Aber $F_{(p-q+1,1)}$ ist die Anzahl der Durchschnitte einer Geraden mit einer Curve der $(p-q+1)$ten Ordnung, d. h. $=p-q+1$; folglich ist

$$F_{(p,q)}=p-q+1+(q-1)(p+1)=pq,$$

und

$$F_{(m,n)}=m.n.$$

Zwei Curven der $m$ten und der $n$ten Ordnung haben im Allgemeinen und höchstens $m.n$ Punkte gemein.

§. 10.

Anzahl der eine Curve bestimmenden Punkte.

Es bedeute $F_{(n)}$ die Anzahl der Punkte, welche im Allgemeinen eine Curve der $n$ten Ordnung vollkommen bestimmen. Befindet sich unter den gegebenen Punkten der Curve ein $p$facher Punkt, so sei $f_{(p)}$ die Anzahl der Punkte, welche durch diesen allein vertreten werden, indem offenbar diese Zahl bloss von p und nicht auch zugleich von der Ordnung der Curve abhängt. Denkt man sich nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Curve der $n$ten Ordnung mittels eines $p$fachen Punktes B und einer Anzahl $F_{(n)}-f_{(p)}$ einfacher Punkte gegeben, und nimmt man B zum Hauptpunkte, und irgend zwei der Curve nicht angehörige Punkte zu den beiden anderen Hauptpunkten, so entspricht derselben in der anderen Ebene eine Curve der $(2n-p)$ten Ordnung, welche in dem einen Hauptpunkte einen $n$fachen, und in jedem der beiden anderen einen $(n-p)$fachen Punkt besitzt. Es sind also von dieser Curve im Ganzen

$$f_{(n)}+2.f_{(n-p)}+F_{(n)}-f_{(p)}$$

Punkte gegeben. Ich behaupte, dass dieselbe durch diese Anzahl von Punkten vollkommen bestimmt sei. Denn liessen sich meh-

rere Curven derselben Ordnung durch diese Punkte legen, we in denselben Hauptpunkten gleichvielfache Punkte besässen, würden denselben auch mehrere Curven der $n$ten Ordnung sprechen, welche mit der ursprünglich gegebenen einen $p$fac Punkt B und ausserdem jene $F_{(n)}-f_{(p)}$ Punkte gemein ha würden. Dies widerspricht aber der Annahme, dass jene ers Curve durch diese Punkte vollkommen bestimmt sein sollte. Als

$$f_{(n)}+2f_{(n-p)}+F_{(n)}-f_{(p)}=F_{(2n-p)},$$

oder

$$F_{(2n-p)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(p)}+2f_{(n-p)}\ldots\ldots \quad (1).$$

Setzt man hier $p=n-1$, so ist

$$F_{(n+1)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(n-1)}+2f_{(1)},$$

und da durch einen einfachen Punkt nur 1 Punkt gegeben ist.

$$F_{(n+1)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(n-1)}+2\ldots\ldots \quad (2).$$

Setzt man hier nach einander $n+1$, $n+2$.... $n+q-n$ an die S von n, so erhält man:

$$\begin{aligned}
F_{(n+2)}-F_{(n+1)}&=f_{(n+1)}-f_{(n)}+2;\\
F_{(n+3)}-F_{(n+2)}&=f_{(n+2)}-f_{(n+1)}+2;\\
&\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\
F_{(q)}-F_{(q-1)}&=f_{(q-1)}-f_{(q-2)}+2;\ \text{also durch Add}\\
F_{(q)}-F_{(n)}&=f_{(q-1)}-f_{(n-1)}+2(q-n)\ldots\ldots \quad (3).
\end{aligned}$$

Hieraus wird für $q=1$, da die Gerade durch 2 Punkte stimmt, und ein Punkt, durch welchen die Curve 0mal geht, für 0 gegebene Punkte zu rechnen ist:

$$F_{(n)}-f_{(n-1)}=2n\ldots\ldots \quad (4);$$

dies heisst:

1) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist vollkommen stimmt, sobald ein $(n-1)$facher Punkt und ausser noch $2n$ Punte derselben beliebig gegeben sind.

Setzt man ferner in (3) $q=n+2$, und in (1) $p=n-2$, erhält man:

$$F_{(n+2)}-F_{(n)}=f_{(n+1)}-f_{(n-1)}+4\ldots\ldots \quad (5).$$

$$F_{(n+2)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(n-2)}+2.f_{(2)}\ldots\ldots \quad (6).$$

also auch

$$f_{(n+1)}-f_{(n-1)}+4=f_{(n)}-f_{(n-2)}+2.f_{(2)};\ \text{oder}$$

$$f_{(n+1)}-f_{n-}\ =f_{(n)}-f_{(n-2)}+2.f_{(2)}-4\ldots\ldots \quad (7);$$

also

$$f_{(n+1)}-f_{(n-1)}=f_{(n)}-f_{(n-2)}+2.f_{(2)}-4;$$
$$f_{(n+3)}-f_{(n+1)}=f_{(n+2)}-f_{(n)}+2.f_{(2)}-4;$$
$$f_{(n+5)}-f_{(n+3)}=f_{(n+4)}-f_{(n+2)}+2.f_{(2)}-4;$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$f_{(p)}-f_{(p-2)}=f_{(p-1)}-f_{(p-3)}+2.f_{(2)}-4; \text{ durch Addition:}$$
$$f_{(p)}-f_{(n-1)}=f_{(p-1)}-f_{(n-2)}+(p-n+1)(f_{(2)}-2)$$

oder

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}-p.(f_{(2)}-2)=f_{(n-1)}-f_{(n-2)}-(n-1)(f_{(2)}-2)\ldots. (8).$$

Hier ist, für $n=2$, $f_{(n-1)}=1$, $f_{(n-2)}=0$, also:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=1+(p-1)(f_{(2)}-2)\ldots. (9);$$

folglich:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=1+(p-1)(f_{(2)}-2);$$
$$f_{(p+1)}-f_{(p)}=1+p.(f_{(2)}-2);$$
$$f_{(p+2)}-f_{(p+1)}=1+(p+1).(f_{(2)}-2);$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$f_{(n)}-f_{(n-1)}=1+(n-1)(f_{(2)}-2); \text{ durch Addition:}$$
$$f_{(n)}-f_{(p-1)}=n-p+1+\tfrac{1}{2}(n+p-2)(n-p+1)(f_{)2)}-2)\ldots. (10);$$

und für $p=1$ oder 2:

$$f_{(n)}=n+\tfrac{1}{2}n(n-1)(f_{(2)}-2)\ldots. (11).$$

Folglich ist nach (4):

$$F_{(n)}=f_{(n-1)}+2n=n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(f_{(2)}-2)+2n$$
$$=3n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(f_{(2)}\ldots. (12).$$

Setzt man endlich in der letzten Gleichung $n=0$ und bedenkt, dass eine Curve, welche von jeder beliebigen Geraden in 0 Punkten geschnitten wird, gar keine Punkte enthalten kann und also auch zu ihrer Bestimmung einer Anzahl von 0 Punkten bedarf, so findet man:

$$0=-1+f_{(2)}-2 \text{ oder } f_{(2)}=3\ldots. (13);$$

folglich:

$$f_{(n)}=n+\tfrac{1}{2}n(n-1)=\tfrac{1}{2}n(n+1)\ldots. (14)$$

und

$$F_{(n)}=3n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)=\tfrac{1}{2}n(n+3)\ldots. (15)$$

2) Wenn von einer Curve ein $n$facher Punkt gegeben ist, so ist derselbe für $\frac{1}{2}n(n+1)$ gegebene Punkte zu rechnen.

In der That: denkt man sich n Punkte einer Curve gegeben und fügt die Bestimmung hinzu, dass dieselben alle in einen einzigen zusammenfallen sollen, so sind ausser diesen n Punkten auch noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte gegeben; denn durch diese n Punkte

gehen n Zweige der Curve, und diese würden sich, sowie n Gerade, in $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkten schneiden, indem man von je zwei Zweigen nur einen einzigen Durchschnittspunkt nimmt, weil sie sich sonst bei der Vereinigung zweier Durchschnittspunkte in jenem $n$fachen Punkte berühren würden. Auch kann ein solcher Durchschnitt zweier Zweige hier nicht als Doppelpunkt gelten, weil der eine der beiden Punkte desselben immer als einer von jenen n gegebenen und bereits in Rechnung gebrachten Punkten anzusehen ist.

3) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist im Allgemeinen durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte vollkommen bestimmt.

§. 11.

Die Tangenten in den Hauptpunkten; Rückkehrpunkte und isolirte Punkte.

Kehren wir wieder zu dem allgemeinen Falle des §. 8 zurück und denken uns eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung, welche in B einen $p$fachen, in B' einen $q$fachen, in B'' einen $r$fachen Punkt besitzt. Es sei Z_1 ein Strahl von B_1, welcher in diesem Punkte B_1 einen der Zweige der entsprechenden Curve $\mathfrak{C}_1$ berührt, und es sei Z der ihm entsprechende Strahl von B; da B_1 ein $(n-(q+r))$facher Punkt ist, so hat Z_1 in diesem Punkte $n-(q+r)+1$ Punkte, und ausserdem noch $2n-(p+q+r)-(n-(q+r)+1)=n-p-1$ Punkte, welche beliebig liegen, mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Diesen letzteren entspricht eine gleiche Anzahl von Punkten, welche der Strahl Z mit $\mathfrak{C}$ gemein hat, und die weder in den Punkt B noch in die Gerade P fallen. Aber Z hat mit $\mathfrak{C}$ $n-p$ Punkte gemein, welche nicht in B fallen; also fällt einer dieser $n-p$ Punkte in die Gerade P. Folglich entsprechen den Tangenten, welche die $n-(q+r)$ Zweige der Curve $\mathfrak{C}_1$ in B_1 berühren, diejenigen Strahlen von B, welche nach den $n-(q+r)$ Durchschnitten von $\mathfrak{C}$ und P gerichtet sind, und umgekehrt.

1) Denjenigen Strahlen eines Hauptpunktes, welche nach den Durchschnitten einer Curve und der Gegenseite des Hauptdreiecks gehen, entsprechen ebensoviele Strahlen des zugeordneten Hauptpunktes, welche die verschiedenen Zweige der entsprechenden Curve im Hauptpunkte berühren; und umgekehrt.

Fallen zwei oder mehrere jener Durchschnittspunkte von $\mathfrak{C}$ und P in einen einzigen zusammen, d. h. hat $\mathfrak{C}$ mit P eine zwei- oder mehrpunktige Berührung, so fallen auch andererseits zwei oder mehrere jener Tangenten zusammen, d. h. zwei oder mehrere Zweige der Curve $\mathfrak{C}_1$ haben in B_1 eine gemeinschaftliche Tangente. In diesem Falle heisst der Punkt B_1 ein Rückkehrpunkt von $\mathfrak{C}_1$, und zwar der $k$ten Klasse, wenn sich in demselben k Zweige der Curve berühren. Auch wird ein $n$facher Punkt einer Curve der $(n+1)$ten Ordnung, in welchem sich alle n Zweige berühren, κατ' ἐξοχήν ein Rückkehrpunkt der Curve genannt. H die Gerade P mit $\mathfrak{C}$ ein oder mehrere Punktenpaare weniger g mein, als die Ordnung der Curve fordert, so fallen auch in ebensoviele Tangentenpaare hinweg, und da letzteres nur denkb

st, wenn auf den betreffenden Zweigen von $\mathfrak{C}_1$ kein stetiger Uebergang vom Punkte B_1 zu anderen Punkten dieser Zweige stattfindet, so erscheint der Punkt B_1 als ein von diesen Zweigen abgesonderter oder isolirter Punkt der Curve.

2) Einem jeden Punkte, in welchem eine Curve eine Hauptlinie der einen Ebene berührt, entspricht ein Rückkehrpunkt der geometrisch verwandten Curve; und zwar berühren sich in demselben ebensoviele Zweige der Curve, soviele Punkte der ersten Curve in jenem Berührungspunkte zusammenfallen.

3) Wird eine Hauptlinie in zwei oder mehreren Punkten weniger geschnitten, als die Ordnung der Curve erfordert, so hat die verwandte Curve im zugeordneten Hauptpunkte einen zwei oder mehreren Zweigen angehörigen isolirten Punkt.

4) Ein und derselbe Punkt einer Curve kann zu gleicher Zeit für einige Zweige derselben ein gewöhnlicher vielfacher, für andere ein Rückkehrpunkt und wieder für andere ein isolirter Punkt sein.

Es gehe von dem $p$fachen Punkte B der Curve $\mathfrak{C}$ irgend eine Tangente t an $\mathfrak{C}$, deren Berührungspunkt t nicht in B falle; so hat t ausser den Punkten B und t noch $n-p-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein; und ist t_1 der entsprechende Punkt von t, so hat die entsprechende Gerade t_1 ausser den Punkten B_1 und t_1 auch nur noch $n-p-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Da nun die Ordnung der letzteren $=2n-(p+q+r)$ und B_1 ein $(n-(q+r))$facher Punkt ist, so muss der Punkt t_1 eine Anzahl von $2n-(p+q+r)-(n-(q+r))-(n-p-2)=2$ Punkten der Curve vertreten, d. h. t_1 berührt $\mathfrak{C}_1$ in t_1.

5) Einer jeden Tangente der einen Curve, welche durch einen Hauptpunkt geht, deren Berührungspunkt aber nicht in diesen letzteren fällt, entspricht wiederum eine Tangente der verwandten Curve, welche durch den zugeordneten Hauptpunkt geht; und zwar sind die Berührungspunkte beider Tangenten entsprechende Punkte.

Dagegen wird jeder Tangente A von $\mathfrak{C}$, welche kein Strahl eines Hauptpunktes ist, also ausser dem Berührungspunkte a noch $n-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein hat, ein Kegelschnitt $[A_1]$ entsprechen; derselbe hat überhaupt $2(2n-(p+q+r))$ Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein, von denen eine Anzahl von $n-(p+q)+n-(q+r)+n-(p+r)=3n-2(p+q+r)$ Punkten nach B_1, B_1', B_1'' gehören; zieht man diese und die jenen $n-2$ Punkten entsprechenden Punkte von den ersteren ab, so bleiben $4n-2(p+q+r)-(3n-2(p+q+r))-(n-2)=2$ Punkte, welche also mit dem dem a entsprechenden Punkte a_1 zusammenfallen; d. h. der Kegelschnitt $[A_1]$ berührt $\mathfrak{C}_1$ in a_1.

6) Jeder Tangente der einen Curve, welche kein Strahl eines Hauptpunktes ist, entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte geht und die verwandte Curve in dem, dem Berührungspunkte der ersteren entsprechenden Punkte berührt.

§. 12.

Bestimmung der Klassenzahl einer Curve der $n$ten Ordnung.

Durch den 5ten Satz des §. 11. sind wir nun in den Stand gesetzt, die Frage nach der Klasse einer Curve von gegebener Ordnung — eine Frage, welche vor einigen Decennien einen in der Geschichte der Mathematik fast unerhörten Streit hervorrief — auf exakte Weise und ohne Hülfe der höheren Gleichungen zu beantworten.

Da die Tangenten einer Curve der $n$ten Ordnung offenbar stetig aufeinander folgen, so bilden sie eine Curve von einer bestimmten Klasse, welche wir, da sie eine Funktion der Zahl n sein muss, durch $F_{(n)}$ bezeichnen wollen. Denkt man sich nämlich von einem beliebigen Punkte alle diejenigen Geraden gezogen, auf denen sich zwei Punkte einer Curve der $n$ten Ordnung vereinigen, so werden im Allgemeinen alle diese Geraden Tangenten der Curve sein, und die Zahl dieser Tangenten ist es, welche mit $F_{(n)}$ bezeichnet wird. Hat aber jene Curve irgend einen vielfachen Punkt, so vereinigen sich zwar auf derjenigen Geraden, welche nach diesem Punkte geht, auch ein oder mehreremale zwei Punkte der Curve, aber weder diese Punkte, noch auch diese Gerade und die Tangenten der Curve stehen in stetigem Zusammenhange miteinander. Es wird also durch einen vielfachen Punkt die Zahl $F_{(n)}$ um eine gewisse Zahl vermindert.

Für den besonderen Fall, den wir zunächst betrachten werden, lassen wir die Grösse dieser Verminderung ganz unberücksichtigt, indem wir unter $\varphi_{(n)}$ die Anzahl der wirklichen Tangenten verstehen, welche sich von einem beliebigen Punkte an eine Curve der $n$ten Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkte ziehen lassen. Es sei $\mathfrak{C}$ diese Curve und B der $(n-1)$fache Punkt derselben, während die beiden anderen Hauptpunkte B', B'' nicht auf der Curve liegen. Die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ ist von der $(n+1)$ten Ordnung und hat in B_1 einen $n$fachen, in B_1' und B_1'' einen einfachen Punkt. Also ist auch die Klasse von $\mathfrak{C}_1$ mit $\varphi_{(n+1)}$ zu bezeichnen. Von einem der Punkte B', B'' gehen an $\mathfrak{C}$ eine Anzahl von $\varphi_{(n)}$ Tangenten, und diesen entsprechen eine gleiche Anzahl Tangenten der $\mathfrak{C}_1$, welche durch den Punkt B_1', B_1'' gehen, aber diesen Punkt nicht zum Berührungspunkte haben. Man kann also vom Punkte B_1' im Ganzen $\varphi_{(n)}+1$ Tangenten an $\mathfrak{C}_1$ legen; folglich werden von einem beliebigen Punkte, der nicht auf $\mathfrak{C}_1$ liegt, höchstens $\varphi_{(n)}+2$ Tangenten ausgehen, und man hat demnach die folgende Relation:

$$\varphi_{(n+1)} = \varphi_{(n)} + 2.$$

Zu derselben Relation würde man übrigens auch gelangt sein, wenn man, statt des Punktes B', den $(n-1)$fachen Punkt B gewählt hätte. Denn ausser den $n-1$ Tangenten, welche $\mathfrak{C}$ in B berühren und deren Anzahl für einen beliebigen Punkt doppelt zu rechnen ist, gehen von dem Punkte B noch $\varphi_{(n)}-2(n-1)$ Tangenten an $\mathfrak{C}$; diesen entsprechen eine gleiche Anzahl Tangenten von $\mathfrak{C}_1$

welche die Curve nicht in B_1 berühren; hierzu kommen noch n Tangenten, deren Berührungspunkt B_1 ist, und die für einen beliebigen Punkt doppelt zu rechnen sind; also ist

$$\varphi_{(n+1)} = \varphi_{(n)} - 2(n-1) + 2n = \varphi_{(n)} + 2, \text{ oder}$$
$$\varphi_{(n+1)} - \varphi_{(n)} = 2; \text{ folglich ist auch....} \quad (1)$$
$$\varphi_{(n+2)} - \varphi_{(n+1)} = 2;$$
$$\varphi_{(n+3)} - \varphi_{(n+2)} = 2;$$
$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$
$$\varphi_{(p)} - \varphi_{(p-1)} = 2; \text{ durch Addition wird hieraus:}$$
$$\varphi_{(p)} - \varphi_{(n)} = 2(p-n) \text{ oder}$$
$$\varphi_{(p)} - 2p = \varphi_{(n)} - 2n.... \quad (2).$$

Aber von einem Punkte lassen sich an eine Curve der 1ten Ordnung, die Gerade, keine, und an einen Kegelschnitt, als Curve 2ter Ordnung, nur 2 Tangenten legen, so dass

$$\varphi_{(1)} = 0 \text{ und } \varphi_{(2)} = 2 \text{ ist;}$$

also hat man für $p=1$ und ebenso auch für $p=2$:

$$\varphi_{(n)} - 2n = -2 \text{ oder}$$
$$\varphi_{(n)} = 2(n-1).$$

1) Eine jede Curve der $n$ten Ordnung, mit einem $(n-1)$fachen Punkte, ist zugleich eine Curve der $2(n-1)$ten Klasse.

Corollar. An eine Curve der 3ten Ordnung, mit einem Doppelpunkte, lassen sich von einem beliebigen Punkte aus im Allgemeinen und höchstens 4 Tangenten, und an eine Curve der 4ten Ordnung, mit einem 3fachen Punkte, 6 Tangenten legen.

Um nun die Zahl $F_{(n)}$ für eine Curve der $n$ten Ordnung überhaupt, welche keine vielfachen Punkte oder deren mehrere und von beliebiger Vielfachheit besitzt, bestimmen zu können, gehe die Bemerkung voraus, dass, da eine Verminderung der Zahl $F_{(n)}$ offenbar nur von vielfachen Punkten herrühren, und die Grösse dieser Verminderung nur von der Anzahl der in einem solchen Punkte vereinigten Punkte, und nicht etwa zugleich auch von der Ordnung der Curve abhängen kann, diese Grösse für einen $p$fachen Punkt $= f_{(p)}$, und wenn zugleich ein p-, ein q-, ein $r$facher Punkt u. s. w. vorhanden ist, $= f_{(p)} + f_{(q)} + f_{(r)}$.... gesetzt werden kann, wo $f_{(p)}$ nur als von p und nicht auch von n abhängig gedacht wird.

Es habe nun eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung in B einen $p$fachen Punkt, gehe aber weder durch B' noch durch B''; so ist die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-p)$ten Ordnung, besitzt in B_1 einen $n$fachen, und sowohl in B_1' als B_1'' einen $(n-p)$fachen Punkt. $\mathfrak{C}$ wird in B von p Geraden berührt, welche

für einen beliebigen Punkt der Ebene doppelt zu rechnen sind; also ist die Anzahl der Tangenten, welche ausserdem noch von B an $\mathfrak{C}$ gelegt werden können, und denen allein Tangenten von $\mathfrak{C}_1$ entsprechen, $= F_{(n)} - f_{(p)} - 2p$. Vom Punkte B_1 gehen an $\mathfrak{C}_1$ n Tangenten, deren Berührungspunkt B_1 ist, und welche für einen beliebigen Punkt der Ebene doppelt zu rechnen sind, und ausserdem noch die jenen $F_{(n)} - f_{(p)} - 2p$ Tangenten entsprechenden; also ist

$$F_{(2n-p)} - f_{(n)} - 2 \cdot f_{(n-p)} = F_{(n)} - f_{(p)} - 2p + 2n \ldots . \quad (1).$$

Oder aber: Vom Punkte B' gehen an $\mathfrak{C}$ im Ganzen $F_{(n)} - f_{(p)}$ Tangenten, denen eine gleiche Anzahl von $\mathfrak{C}_1$ entspricht, deren Berührungspunkt B_1' nicht ist. Zu diesen letzteren kommt noch die doppelte Anzahl der Tangenten, deren Berührungspunkt B_1' ist, so ist $F_{(n)} - f_{(p)} + 2(n-p)$ die Anzahl sämmtlicher Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte an $\mathfrak{C}_1$ gelegt werden können; also

$$F_{(2n-p)} - f_{(n)} - 2 \cdot f_{(n-p)} = F_{(n)} - f_{(p)} + 2(n-p),$$

eine Relation, welche mit der vorigen identisch ist. Setzt man hier zunächst $p = n-1$, so erhält man, weil $f_{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned}
&F_{(n+1)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-1)} + 2; \text{ folglich} \ldots . \quad (2).\\
&F_{(n+2)} - F_{(n+1)} = f_{(n+1)} - f_{(n)} + 2;\\
&F_{(n+3)} - F_{(n+2)} = f_{(n+2)} - f_{(n+1)} + 2;\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&F_{(p)} - F_{(p-1)} = f_{(p-1)} - f_{(p-2)} + 2; \text{ durch Addition:}\\
&F_{(p)} - F_{(n)} = f_{(p-1)} - f_{(n-1)} + 2(p-n) \ldots . \quad (3).
\end{aligned}$$

Setzt man hier $p = n+2$, so wird:

$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n+1)} - f_{(n-1)} + 4 \ldots . \quad (4);$$

und für $p = 1$ oder 2 erhält man, weil $F_{(1)} = 0$, $F_{(2)} = 2$, $f_{(0)} = 0$, $f_{(1)} = 0$ ist:

$$F_{(n)} - f_{(n-1)} = 2(n-1) \ldots . \quad (5).$$

Ferner wird aus (1), wenn $p = n-2$ gesetzt wird:

$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 \cdot f_{(2)} + 4 \ldots . \quad (6);$$

also durch Verbindung von (4) und (6):

$$\begin{aligned}
&f_{(n+1)} - f_{(n-1)} = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 \cdot f_{(2)}; \text{ also auch} \ldots . \quad (7)\\
&f_{(n+3)} - f_{(n+1)} = f_{(n+2)} - f_{(n)} + 2 \cdot f_{(2)};\\
&f_{(n+5)} - f_{(n+3)} = f_{(n+4)} - f_{(n+2)} + 2 \cdot f_{(2)};\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&f_{(p)} - f_{(p-2)} = f_{(p-1)} - f_{(p-3)} + 2 \cdot f_{(2)}; \text{ durch Addition:}\\
&f_{(p)} - f_{(n-1)} = f_{(p-1)} - f_{(n-2)} + (p-n+1) \cdot f_{(2)}
\end{aligned}$$

oder:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}-p\cdot f_{(2)}=f_{(n-1)}-f_{(n-2)}-(n-1)\cdot f_{(2)}\ldots\ (8);$$

also für $n=2$:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=(p-1)\cdot f_{(2)}.\quad \text{Demnach ist....}\ (9)$$

$$f_{(p+1)}-f_{(p)}=p\cdot f_{(2)};$$

$$f_{(p+2)}-f_{(p+1)}=(p+1)\cdot f_{(2)};$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$f_{(n)}-f_{(n-1)}=(n-1)\cdot f_{(2)};\quad \text{durch Addition:}$$

$$f_{(n)}-f_{(p)}=\tfrac{1}{2}(n-p)(n+p-1)\cdot f_{(2)}\ldots\ (10).$$

Hieraus wird für $p=0$ oder 1:

$$f_{(n)}=\tfrac{1}{2}n(n-1)\cdot f_{(2)}.\quad (11).$$

Aber nach (5) ist:

$$F_{(n)}=f_{(n-1)}+2(n-1)=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)f_{(2)}+2(n-1);$$

folglich ist

$$F_{(n)}=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\cdot f_{(2)}+2(n-1)\ldots\ (12);$$

und da eine Curve der 0ten Ordnung gewiss auch keine Tangenten besitzt, also $F_{(0)}=0$ ist, so ist für $n=0$:

$$f_{(2)}=2\ldots\ (13);$$

und setzt man diesen Werth von $f_{(2)}$ in (11) und (12), so findet sich:

$$f_{(n)}=n(n-1)\ldots\ (14)$$

und ebenso auch:

$$F_{(n)}=n(n-1)\ldots\ (15).$$

2) Durch einen jeden $p$fachen Punkt, welchen eine Curve der $n$ten Ordnung besitzt, wird die Klassenzahl derselben um $p(p-1)$ Einheiten erniedrigt.

3) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist im Allgemeinen und höchstens zugleich eine Curve der $n(n-1)$ten Klasse.

Corollar. Eine Curve der 3ten, 4ten, 5ten.... Ordnung ist im Allgemeinen und höchstens eine Curve der 6ten, 12ten, 20ten.... Klasse.

Besitzt nun eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung in den Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt, sonst aber keinen vielfachen Punkt, so ist $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-(p+q+r))$ten Ordnung und besitzt auch bloss in den Hauptpunkten einen $(n-(p+q))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(q+r))$fachen Punkt; also ist die Klasse von $\mathfrak{C}_1=$

$$\begin{aligned}&(2n-(p+q+r))(2n-(p+q+r)-1)-(n-(p+q))(n-(p+q)-1)\\&-(n-(p+r))(n-(p+r)-1)-(n-(q+r))(n-(q+r)-1)\\&=n(n+1)-p(p+1)-q(q+1)-r(r+1).\end{aligned}$$

Und auch umgekehrt, indem $\mathfrak{C}_1$ an die Stelle von $\mathfrak{C}$ gesetzt wird, findet sich die Klasse von $\mathfrak{C}=$

$$(2n-(p+q+r))(2n-(p+q+r)+1)-(n-(p+q))(n-(p+q)+1)$$
$$-(n-(p+r))(n-(p+r)+1)-(n-(q+r))(n-(q+r)+1)$$
$$=n(n-1)-p(p-1)-q(q-1)-r(r-1),$$

wie es von vornherein zu erwarten stand.

4) Einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht im Allgemeinen und höchstens eine Curve der $n(n+1)$ten Klasse.

Endlich, da jedem vielfachen Punkte von $\mathfrak{C}$, der nicht Hauptpunkt ist, ein ebensovielfacher Punkt von $\mathfrak{C}_1$ entspricht, so folgt:

5) Besitzt eine Curve der $n$ten Ordnung in den drei Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt und ausserdem noch einen beliebigen π-, $\varkappa$-, ϱ-...fachen Punkt, so ist die ihr entsprechende Curve von derselben Klasse, als eine Curve der $(n+1)$ten Ordnung, welche einen $(p+1)$-, einen $(q+1)$-, einen $(r+1)$- und einen π-, $\varkappa$-, ϱ-...fachen Punkt besitzt.

§. 13.

Konstruktion einiger Curven höherer Ordnung mittels des blossen Lineals, und Uebertragung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte auf höhere Curven.

Aufgabe.

Eine Curve der dritten Ordnung mittels des blossen Lineals punktweise zu zeichnen, sobald ein Doppelpunkt B_1'' und ausserdem irgend sechs Punkte B_1, B_1', $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ derselben beliebig gegeben sind.

Auflösung.

Man verbinde den Doppelpunkt B_1'' (Taf. II. Fig. 2.) mit zweien der übrigen Punkte, z. B. mit B_1 und B_1', durch die Geraden P_1', P_1, und diese Punkte mit sich selber durch die Gerade P_1'', ziehe zwei beliebige Gerade A, A', welche die P_1'' resp. in $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1'$ schneiden, und von denen die eine, A, der P_1' in $\mathfrak{p}$, die andere, A', der P_1 in $\mathfrak{p}'$ begegnet; verbinde die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ mit einander durch die Gerade P'', nehme auf P'' irgend zwei Punkte B, B' an und verbinde B mit $\mathfrak{p}_1$ durch P', B' mit $\mathfrak{p}_1'$ durch P. Der Durchschnitt von P, P' heisse B''. Nun denke man sich zwei perspektivische Strahlbüschel B, B_1, deren persp. Durchschnitt A, und wieder zwei andere, B', B_1', deren persp. Durchschnitt A' ist, und zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Bezug auf diese zwei Paar Strahlbüschel geometrisch verwandt; bestimme in $\mathfrak{E}$ die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und lege durch die fünf Punkte B'', $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, d. h. man suche beliebig viele andere Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$.... desselben, was sich auf mehrfache Weise durch blosses Linienziehen bewirken lässt. Endlich bestimme man in $\mathfrak{E}_1$ die den Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$.... entsprechen

den Punkte e_1, f_1....; so gehören sämmtliche Punkte B_1'', B_1, B_1', a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1...., und zwar ersterer als Doppelpunkt, einer und derselben Curve dritter Ordnung an.

Beweis.

Da der Verbindungslinie P'' der Punkte B, B', insofern sie dem Strahlbüschel B oder B' angehört, in den Strahlbüscheln B_1, B_1' die Gerade P_1' oder P_1 entspricht, und da ebenso der Geraden P_1'' in den Strahlbüscheln B, B' die Geraden P', P entsprechen, so sind die Punktenpaare B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' die zugeordneten Hauptpunkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$. Und da nun der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ im Allgemeinen nur durch einen Hauptpunkt B'' geht, so ist die demselben entsprechende Curve von der $2.2-1=3$ten Ordnung und besitzt in B_1'' einen 2fachen und in jedem der Punkte B_1, B_1' einen $2-1=1$fachen Punkt (§. 8. 1.).

Sind überhaupt in einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ von einer Curve $\mathfrak{C}_1$ der $n$ten Ordnung, welche einen $(n-1)$fachen Punkt B_1'' besitzt, dieser Punkt B_1'' und ausserdem $2n$ Punkte beliebig gegeben, von denen irgend zwei B_1, B_1' heissen mögen, und bestimmt man die Punkte B, B', B'' ebenso wie in der obigen Aufgabe, und noch die den übrigen $2n-2$ gegebenen Punkten entsprechenden Punkte, so ist nach §. 10. 1. durch diese $2n-2$ Punkte und den Punkt B'' eine Curve der $(n-1)$ten Ordnung, welche B'' zum $(n-2)$fachen Punkte hat, bestimmt, und ist die der $\mathfrak{C}_1$ entsprechende Curve $\mathfrak{C}$. Man würde also jene Curve $\mathfrak{C}_1$ mit dem blossen Lineal zeichnen können, wenn die Curve $\mathfrak{C}$ gezeichnet vorläge. Nun aber lässt sich die der 2ten Ordnung, also auch die der 3ten mit einem Doppelpunkte, die der 4ten, 5ten, 6ten.... $n$ten Ordnung mit einem 3-, 4-, 5-.... $(n-1)$fachen Punkte mittels des blossen Lineals zeichnen. (Vgl. Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces geométriques par M. J. V. Poncelet. art. 204. in Crelle's Journal. Bd. 8. Hft. 2.).

1) Eine jede Curve der $n$ten Ordnung, welche einen $(n-1)$fachen Punkt besitzt, lässt sich punktweise mittels des blossen Lineals zeichnen, sobald dieser vielfache Punkt und ausserdem $2n$ Punkte der Curve beliebig gegeben sind.

Es seien in Taf. II. Fig. 2. durch den (beliebigen) Punkt B_1 der Curve 3. O. $\mathfrak{K}_1$ die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... gelegt, welche den (ebenfalls beliebigen) Strahl P_1 des Doppelpunktes B_1'' in den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... und die Curve selbst noch in den Punktenpaaren a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'; d_1, d_1'.... schneiden; und es sei auf jeder noch ein Punkt α_1', β_1', γ_1', δ_1'.... so bestimmt, dass a_1, a_1' mit α_1, α_1'; β_1, β_1' mit b_1, b_1' u. s. f. harmonisch sind. Dann sind nach §. 6. 4. die je vier solchen Punkten entsprechenden Punkte ebenfalls harmonisch, und da allen Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... ein und derselbe Punkt B entspricht, und die entprechenden von a_1, a_1'; b_1, b_1'.... einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ angehören, so liegen, wie bekannt, alle Punkte, welche den α_1', β_1' γ_1' δ_1'.... entsprechen, auf einer Geraden, nämlich der harmonischen Polare von B für $\mathfrak{K}$, und folglich die Punkte α_1', β_1', γ_1', δ_1'.. selber auf einem Kegelschnitte, welcher durch B_1, B_1', B_1'' geht u. s. w.

2) Legt man durch den Doppelpunkt einer Curve dritter Ordnung irgend eine Gerade P_1, und durch irgend einen anderen Punkt B_1 derselben beliebig viele Gerade a_1, b_1, c_1, d_1.... und bestimmt auf jeder denjenigen Punkt, welcher zu den beiden neuen Punkten und zu dem der Geraden P_1 angehörigen der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese neuen Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher der Curve im Doppelpunkte, im Punkte B_1, in demjenigen Punkte, in welchem die Gerade P_1 dieselbe von Neuem schneidet, und ausserdem, wenn sie vorhanden sind, in den Berührungspunkten der beiden Tangenten, welche von B_1 an dieselbe gehen, begegnet.

Den Strahlenpaaren, welche den Doppelpunkt B_1'' mit jenen Durchschnittspunkten a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'.... verbinden, entsprechen in $\mathfrak{E}$ ebensoviele Strahlenpaare, welche die entsprechenden Punkte a, a'; b, b'; c, c'.... des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ mit dem Punkte B'' verbinden; diese Strahlenpaare aber bilden, weil die Linien aa', bb', cc'.... durch einerlei Punkt B gehen, nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. §. 3. 3. eine Involution von Strahlen; also hat man nach §. 6. 1. den folgenden Satz:

3) Legt man durch irgend einen Punkt einer Curve dritter Ordnung, welche einen Doppelpunkt besitzt, beliebig viele Gerade, so bilden die Strahlenpaare, welche den Doppelpunkt mit den neuen Durchschnitten dieser Geraden und der Curve verbinden, eine Involution von Strahlen, und zwar gehen die Hauptstrahlen dieser Involution, wenn sie vorhanden sind, nach den Berührungspunkten der beiden von jenem Punkte ausgehenden Tangenten.

Durch irgend einen Punkt p_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ und durch die drei Punkte B_1, B_1', B_1'' denke man sich beliebig viele Kegelschnitte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$.... gelegt; so wird im Allg. ein jeder derselben die Curve $\mathfrak{K}_1$ in noch zwei Punkten a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'; d_1, d_1'.... schneiden, und auf jedem wird es einen Punkt α_1, β_1, γ_1, δ_1...., geben, welcher mit p_1, als zugeordnetem Punkte, und mit a_1, a_1'; b_1, b_1'.... vier harmonische Punkte des betreffenden Kegelschnittes bildet. Jenen Kegelschnitten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$... entsprechen in $\mathfrak{E}$ ebensoviele Gerade, welche durch einerlei Punkt p gehen, den Punkten a_1, a_1'; b_1, b_1'.... die Durchschnitte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, und den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... solche Punkte, welche mit p, als zug. Punkte, und mit diesen Durchschnitten vier harmonische Punkte bilden, also sämmtlich der harm. Polare des Punktes p für $\mathfrak{K}$ angehören. Folglich liegen auch die Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1.... alle auf einem Kegelschnitte u. s. w.

4) Haben eine Schaar von Kegelschnitten mit einer Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt und zwei einfache Punkte und unter sich noch einen vierten Punkt p_1 gemein, und bestimmt man auf einem jeden dieser Kegelschnitte zu den beiden Punkten, in welchen er noch ausserdem die Curve schneidet, und zu dem

Punkte p_1, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem neuen Kegelschnitte, welcher mit jener Schaar und der Curve die nämlichen drei Punkte gemein hat und die letztere in denjenigen zwei Punkten schneidet, in welchen sie von zwei Kegelschnitten jener Schaar berührt wird.

Sind von einer Curve der 4ten Ordnung, welche drei Doppelpunkte besitzt, ausser diesen letzteren noch $\frac{4(4+3)}{2} - 3\frac{2(2+1)}{2} = 5$ einfache Punkte gegeben, so ist dieselbe, und mit ihr zugleich, als die ihr entsprechende Curve, ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt; da nun dieser mittels des Lineals sich zeichnen lässt, so folgt:

5) Eine Curve der vierten Ordnung mit drei Doppelpunkten lässt sich punktweise mittels des blossen Lineals zeichnen, sobald diese drei Doppelpunkte und ausserdem irgend fünf Punkte derselben gegeben sind.

Die Ausführung sei dem Leser überlassen. Sind die drei Doppelpunkte insbesondere drei Rückkehrpunkte, so entspricht nach §. 11. 2. der Curve ein Kegelschnitt, welcher die drei Hauptlinien der Ebene berührt, und den drei Tangenten in den Rückkehrpunkten entsprechen diejenigen Geraden, welche die Berührungspunkte des Kegelschnittes mit den Gegenecken des Hauptdreiecks verbinden; solche drei Geraden aber, wie bekannt, schneiden einander in einerlei Punkte; also:

6) Die drei Tangenten in drei Rückkehrpunkten einer Curve vierter Ordnung gehen durch einen und denselben Punkt.

Ferner erhält man auf ähnliche Weise, wie der Satz 2. des §. 13. gefunden wurde, den folgenden:

7) Besitzt eine Curve 4ter Ordnung drei Doppelpunkte, und denkt man sich auf irgend einem Strahle des einen dieser Punkte einen Punkt so bestimmt, dass er zu den beiden neuen Punkten der Curve und zu demjenigen, welcher der Verbindungslinie der beiden anderen Doppelpunkte angehört, der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher durch die drei Doppelpunkte und durch die Berührungspunkte derjenigen zwei Tangenten der Curve geht, welche sich in einem Doppelpunkte schneiden.

Und wenn statt des ersten Doppelpunktes irgend ein beliebiger Punkt der Ebene gesetzt wird:

8) Besitzt eine Curve vierter Ordnung drei Doppelpunkte, und legt man durch die letzteren und durch einen beliebigen Punkt p der Ebene eine Schaar Kegelschnitte, und bestimmt auf jedem dieser Kegelschnitte zu den beiden Punkten, in welchen er die Curve von Neuem schneidet, und zu dem Punkte p, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem neuen Kegelschnitte, welcher auch die drei Doppelpunkte enthält u. s. w.

Es sei endlich $\mathfrak{C}_1$ eine Curve 5ter Ordnung, welche einen 3fachen Punkt B_1'' und drei Doppelpunkte B_1, B_1', O_1 besitzt; durch B_1'' gehe eine beliebige Gerade a_1'', welche $\mathfrak{C}_1$ von Neuem in 2 Punkten a_1, a_1' schneidet; durch die Punkte B_1, B_1', B_1'', O_1 sei ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ gelegt, welcher die Gerade a_1'' zum andernmal in b_1 schneidet und mit $\mathfrak{C}_1$ noch einen (einzigen) Punkt J_1 gemein hat. Endlich sei b_1' zu a_1, a_1' und b_1 der vierte harmonische, dem b_1 zugeordnete Punkt. Jetzt denke man sich in einer Ebene $\mathfrak{E}$ die Punkte B, B', B'' beliebig gewählt, und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' geometrisch verwandt; so entspricht der $\mathfrak{C}_1$ eine Curve 3ter Ordnung $\mathfrak{C}$, welche durch den Punkt B'' geht und einen dem O_1 entsprechenden Doppelpunkt O besitzt; dem Strahle a_1'' und den harmonischen Punkten a_1, a_1'; b_1, b_1' entspricht ein Strahl a'' von B'' und vier harmonische Punkte a, a'; b, b'; dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ entspricht eine Gerade $\mathfrak{K}$, welche durch O, den dem J_1 entsprechenden Punkt J der Curve und durch b geht; die Punkte a, a' liegen auf $\mathfrak{C}$, und nach 2. liegen alle Punkte b', welche den verschiedenen Strahlen von B'' angehören, auf einem Kegelschnitte, welcher die Punkte B'', O, J enthält; da nun dieser Kegelschnitt nur durch einen einzigen Hauptpunkt B'' geht, so entspricht ihm in $\mathfrak{E}_1$ eine Curve 3. O., welche in B_1'' einen Doppelpunkt besitzt und einfach durch B_1, B_1' und O_1 hindurch geht. Hieraus folgt:

9) Sind irgend eine Curve 5ter Ordnung, welche einen 3fachen Punkt B_1'' und drei Doppelpunkte B_1, B_1', O_1 besitzt, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, welcher durch diese vier Punkte geht, beliebig gegeben, und denkt man sich auf jedem Strahle jenes Punktes B_1'' zu den beiden Punkten, welche ausserdem noch der Curve 5ter Ordnung, und zu jenem, welcher noch dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ angehört, den vierten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt bestimmt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einer Curve 3ter Ordnung, welche an der Stelle jenes dreifachen Punktes einen Doppelpunkt besitzt, durch die drei Doppelpunkte der Curve 5ter Ordnung und ausserdem durch denjenigen Punkt, in welchem der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ diese Curve von Neuem schneidet, hindurchgeht.

Besondere Fälle.

§. 14.

Zwei Paar projektivisch-gleiche Strahlbüschel.

Sind sowohl die Strahlbüschel B, B_1 als auch B', B_1' projektivisch-gleich, d. h. schliessen je zwei Strahlen a, b des einen denselben spitzen Winkel ein als die entsprechenden Strahlen a_1, b_1 des anderen, so sind auch die von den Hauptlinien P, P'' und P_1'', P_1' einerseits, und die von P, P'' und P_1'', P_1 andererseits eingeschlossenen spitzen Winkel einander gleich. Es sind aber hierbei zwei Fälle denkbar: *a*) Entweder sind die in-

neren Winkel B, B' des Hauptdreiecks $BB'B''$ den inneren Winkeln B_1, B_1' des Hauptdreiecks $B_1B_1'B_1''$ gleich; oder b) es sind nur zwei innere Winkel B, B_1; dagegen der andere innere Winkel B' des einen Dreiecks dem Aussenwinkel B_1' des anderen gleich.

Im Falle a) sind die Hauptdreiecke ähnlich, und denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ für einen Augenblick so aufeinander gelegt, dass die Hauptlinien P'', P_1'' in einerlei gerade Linie fallen, die Richtung von B nach B' dieselbe sei, als die von B_1 nach B_1', und dass die Punkte B'', B_1'' auf einerlei Seite jener geraden Linie liegen, so müssen sowohl die Strahlbüschel B, B_1 als die Strahlbüschel B', B_1' ungleichliegend sein, d. h. folgen z. B. in B die Strahlen P', a, b, c, d, P'.... von der Rechten zur Linken aufeinander, so gehen die entsprechenden Strahlen P_1' a_1, b_1, c_1, d_1, P_1''.... von der Linken zur Rechten. Sind nun die Strahlbüschel B, B' selber projektivisch-gleich, und sind z. B. a, b; a', b' irgend zwei Paar ihrer entsprechenden Strahlen, so ist

$$\text{W.}\,a_1b_1 = \text{W.}\,ab = \text{W.}\,a'b' = \text{W.}\,a_1'b_1', \text{ also auch } \text{W.}\,a_1b_1 = \text{W.}\,a_1'b_1';$$

also sind auch die von den entsprechenden Strahlen gebildeten Strahlbüschel B_1, B_1' projektivisch-gleich, und zwar sind letztere gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem B, B' gleichliegend oder ungleichliegend sind.

Im Falle b) sind die Hauptdreiecke nicht ähnlich, es sei denn, sie wären rechtwinklig, und denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so wie oben aufeinander gelegt, so werden die Strahlbüschel B, B_1 ungleichliegend, dagegen die Strahlbüschel B', B_1' gleichliegend sein. Sind also die Strahlbüschel B, B' gleichliegend, so müssen die ebenfalls projektivisch-gleichen Strahlbüschel B_1, B_1' ungleichliegend sein, und umgekehrt.

Bekanntlich sind zwei perspektivische Strahlbüschel B, B' projektivisch gleich, und zwar gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem ihr perspektivischer Durchschnitt unendlich entfernt oder auf ihrem gemeinschaftlichen Strahle in der Mitte zwischen ihren Mittelpunkten senkrecht steht; und zwei schiefliegende projektivische Strahlbüschel B, B' sind gleich, und zwar gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem ihre Mittelpunkte auf einem Kreise liegen, und ihre entsprechenden Strahlen auf demselben sich schneiden, oder ihre Mittelpunkte die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel sind, auf welcher die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen liegen; und umgekehrt. Hieraus folgt nun im Falle a):

1) Der unendlich entfernten Geraden einer jeden der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ entspricht in der anderen der dem Hauptdreiecke umschriebene Kreis; und daher bilden auch die entsprechenden Strahlen des dritten Paares zugeordneter Hauptpunkte (B'', B_1'') zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel.

2) Den drei Geraden, welche auf den Seiten des einen Hauptdreiecks in deren Mitten senkrecht stehen, entsprechen drei dem anderen Hauptdreiecke umschriebene gleichseitige Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf den betreffenden Seiten liegen.

3) Allen Kreisen der einen Ebene, welche bloss durch zwei Hauptpunkte gehen, entsprechen in der anderen ebenfalls Kreise, welche bloss durch die zwei zugeordneten Hauptpunkte gehen.

4) Allen gleichseitigen Hyperbeln, welche bloss durch zwei Hauptpunkte gehen und deren Verbindungslinie zum Durchmesser haben, entsprechen ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, welche bloss durch die beiden zugeordneten Hauptpunkte gehen und deren Verbindungslinie zum Durchmesser haben.

Ferner ergiebt sich aus 2. und aus Archiv Thl. III. S. 225. *a.*:

5) Dem Mittelpunkte der den beiden Hauptdreiecken umschriebenen Kreise entsprechen gegenseitig die Durchschnitte der Höhen dieser Dreiecke.

Dagegen findet im Falle *b*) Folgendes statt:

6) Der unendlich entfernten Geraden einer jeden der beiden Ebenen entspricht eine dem Hauptdreiecke der anderen umschriebene gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt auf einer bestimmten Seite dieses Dreiecks liegt; und daher bilden die entsprechenden Strahlen des dritten Paares zugeordneter Hauptpunkte keine projektivisch-gleichen Strahlbüschel.

7) Einer bestimmten von den drei Senkrechten in den Mitten der Hauptdreiecksseiten entspricht der dem anderen Hauptdreieck umschriebene Kreis; und daher gehen die beiden den Hauptdreiecken umschriebenen Kreise gegenseitig durch die ihren Mittelpunkten entsprechenden Punkte.

8) Allen Kreisen, welche bloss durch die beiden Hauptpunkte B, B' (oder B_1, B_1') gehen, entsprechen gleichseitige Hyperbeln, welche bloss durch die Hauptpunkte B_1, B_1' (oder B, B') gehen und dieselben zu Endpunkten eines Durchmessers haben.

§. 15.

Zwei aufeinander gelegte Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$.

Denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ aufeinander gelegt, so ist ihre geometrische Verwandtschaft am Allgemeinsten durch zwei Kegelschnitte K, K' (Taf. II. Fig. 1.) bestimmt, deren einer die zug. Hauptpunkte B, B_1 und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen a, a_1; b, b_1...., der andere zwei andere zug. Hauptpunkte B', B_1' und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen a', a_1'; b', b_1'.... enthält.

Fallen zwei entsprechende Punkte a, a_1 beider Ebenen zusammen, so gehen die Strahlen a, a', a_1, a_1' durch einerlei Punkt (aa_1), und folglich ist letzterer den Kegelschnitten K, K' gemeinschaftlich, und da zwei Kegelschnitte im Allgemeinen entweder vier oder zwei oder keinen Punkt gemein haben, so folgt:

1) Zwei aufeinander gelegte geometrisch verwandte Ebenen besitzen im Allgemeinen entweder vier oder zwei oder keine Punkte, und nur in gewissen Grenzla-

gen auch drei oder einen, in welchen sich entsprechende Punkte vereinigen.

Sind insbesondere zwei Strahlbüschel B, B' perspektivisch, d. h. ist K eine Gerade, so werden sowohl in den Durchschnitten von K und K', als auch in denen des gemeinschaftlichen Strahles BB_1 und des Kegelschnittes K' entsprechende Punkte vereinigt; und sind zugleich B, B_1 und B', B_1' perspektivisch, so giebt es solcher Punkte allemal vier, es sei denn, dass einige zusammenfallen, nämlich im Durchschnitte der perspektivischen Durchschnitte, in dem der Geraden BB_1, $B'B_1'$, und in den Punkten, wo allemal die eine der beiden letzteren den persp. Durchschnitt der beiden anderen Strahlbüschel schneidet.

Dahingegen können im Allgemeinen keine zwei entsprechenden Geraden zusammenfallen, weil nur den Strahlen der Hauptpunkte wiederum gerade Linien entsprechen. Sind aber z. B. B, B_1 perspektivisch, so fallen längs BB_1 zwei entsprechende Gerade zusammen; und sind zugleich auch B', B_1' perspektivisch, und ist der gem. Strahl des einen Paares zugleich der perspektivische Durchschnitt des anderen, so müssen sich in jedem Punkte dieses Strahles zwei entsprechende vereinigen. Sind endlich zwei Strahlbüschel B, B_1 concentrisch, so fallen nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. 9. *a.* entweder zwei oder bloss ein oder kein Paar entsprechende Strahlen derselben zusammen.

Man denke sich ferner zwei Punkte a, a_1, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. sowohl wenn a zu $\mathfrak{E}$, a_1 zu $\mathfrak{E}_1$, als auch wenn a_1 zu $\mathfrak{E}$, a zu $\mathfrak{E}_1$ gerechnet wird; und es seien a, α; a', α'; a_1, α_1; a_1', α_1' resp. die nach a, a_1 gehenden Strahlen von B, B', B_1, B_1'; so liegen einerseits die Durchschnitte von a und a_1; α und α_1 auf dem Kegelschnitte K, und die Gerade A, welche dieselben verbindet, trifft die Gerade BB_1 in einem Punkte $\mathfrak{k}$, welcher der harm. Pol der Geraden aa_1 für K ist; folglich geht aa_1 durch den harm. Pol von BB_1 für K; aber auch andererseits durch den harm. Pol von $B'B_1'$ für K'; also ist sie die Gerade, welche den Durchschnitt der Tangenten in B und B_1 mit dem der Tangenten in B' und B_1' verbindet.

Da nun die Punkte B, B_1 und der Durchschnitt von a, a_1 auf K liegen, und BB_1 den harmonischen Pol $\mathfrak{k}$ von aa_1 für K enthält, so sind, nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. §. 4. 2. die Punkte a, a_1 zwei zugeordnete harm. Pole für K; aber auch für K'; also das den Involutionen zug. harm. Pole für K und K' gemeinschaftliche Paar.

2) In zwei aufeinander gelegten geometrisch verwandten Ebenen giebt es im allgemeinsten Falle entweder nur ein einziges oder kein Paar Punkte, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen.

Fällt der Pol von $B'B_1'$ für K' mit dem von BB_1 für K zusammen, so gehen durch dieselben unzählige Gerade, deren jede zwei Punkte a, a_1 besitzt. Im Archiv Thl. V. Nr. XVIII. §. 6. 9. ist gezeigt worden, dass in dem Falle, wenn jener Pol auf einer gemeinschaftlichen Sekante von K, K' liegt, die Punktenpaare a, a_1, welche den verschiedenen Strahlen desselben angehören, einen Kegelschnitt bilden müssen. In jedem anderen Falle aber bilden sie keinen Kegelschnitt, sondern eine Curve höherer Ordnung.

Sind zwei Strahlbüschel B, B_1 perspektivisch, so sind der Punkt $\mathfrak{k}$, wo BB_1 vom persp. Durchschnitt derselben, und der Punkt $\mathfrak{k}_1$, wo BB_1 von der Geraden aa_1 geschnitten wird, mit den Punkten B, B_1 harmonisch; und ausserdem sind die Punkte a, a_1 mit $\mathfrak{k}_1$ und dem dem persp. Durchschnitt K angehörigen Punkte $\mathfrak{k}_2$ harmonisch. Im Fall nun auch B', B_1' perspektivisch sind und $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ analoge Bedeutung als $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ haben, so giebt es, so lange weder die persp. Durchschnitte K, K' noch auch die Punkte $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammenfallen, nur eine Gerade aa_1 und entweder zwei oder keine Punkte a, a_1. Fallen nur K und K' zusammen, also auch $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_2'$, so giebt es keine Punkte a, a_1, die zugleich mit $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ und mit $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ harmonisch sind; und fallen nur $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammen, so besitzt aus demselben Grunde nur ein einziger Strahl derselben Punkte a, a_1, dann aber unzählige Paare solcher Punkte. Fallen endlich sowohl K, K' als $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammen, so giebt es auf jedem Strahle der letzteren, d. h. des Durchschnittes von BB_1 und $B'B_1'$, unzählige Punktenpaare a, a_1; aber dann geht der gemeinsame persp. Durchschnitt nach dem Durchschnitte der Geraden BB' und B_1B_1', und dem Strahle BB' entspricht sowohl in B_1 als in B_1' der Strahl B_1B_1', ein Fall, der noch nicht hierher gehört.

Wenn im allgemeinen Falle die Kegelschnitte K, K' sich decken, so giebt es auf der Geraden, welche die harm. Poole von BB_1 und $B'B_1'$ verbindet, unzählige Punktenpaare a, a_1; nämlich je zwei zugeordnete harm. Pole derselben sind ein solches Paar.

Sind endlich zwei Strahlbüschel B, B_1 concentrisch, so sind die Strahlen a, a_1 derselben, welche nach zwei Punkten a, a_1 gehen, in doppeltem Sinne entsprechend, also sind nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. §. 1. *b.* die Strahlbüschel involutorisch; hieraus folgt:

3) Sind die beiden Paar Strahlbüschel B, B_1; B', B_1', in Ansehung derer zwei aufeinander gelegte Ebenen geometrisch verwandt sind, concentrisch, so entsprechen entweder alle oder kein Paar Punkte derselben einander in doppeltem Sinne.

Gilt letzteres von allen entsprechenden Punktenpaaren, so sollen die Ebenen involutorisch-verwandt, und je zwei entsprechende Systeme derselben zwei Involutions-Systeme heissen. Im Ganzen bleiben dann noch alle Erscheinungen, wie früher; einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht eine der $2n$ten Ordnung u. s. w., doch ist es einerlei, in welcher der beiden Ebenen liegend eine jede von beiden Curven vorgestellt wird; es fallen nämlich, was bei bloss concentrischen proj. Strahlbüscheln nicht stattfindet, jetzt auch das dritte Paar zugeordnete Hauptpunkte zusammen.

β.

Zwei Systeme von Geraden.

§. 16.

Sind in einer Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Gerade A, A' mit den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$...., in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei

Gerade A_1, A_1' mit den Punkten a_1, b_1, c_1, d_1.... und a_1', b_1', c_1', d_1'.... gegeben, und ist

$$A(a, b, c, d....) = A_1(a_1, b_1, c_1, d_1....) \text{ und zugleich}$$
$$A'(a', b', c', d'....) = A_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....),$$

so entspricht jeder Geraden a der Ebene $\mathfrak{E}$, welche A, A' in a, a' schneidet, eine Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$, welche durch die entsprechenden Punkte a_1, a_1' geht; insbesondere entspricht der unendlich entfernten Geraden einer jeden Ebene diejenige Gerade der anderen, welche die sogenannten Durchschnitte der Parallelstrahlen verbindet. Dem Durchschnitte p'' von A, A' entspreche in A_1 ein Punkt p_1' und in A_1' ein Punkt p_1; und umgekehrt: dem Durchschnitte p_1'' von A_1, A_1' entspreche in A ein Punkt p', in A' ein Punkt p, und es seien A'', A_1'' die Geraden, welche resp. p und p', p_1 und p_1' verbinden. Dies vorausgesetzt, so entspricht jedem Strahle von p'' die Gerade A_1'', und jedem Strahle von p_1'' die Gerade A''.

Es sei B irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, dessen Strahlen a, b, c, d.... die A in a, b, c, d...., die A' in a', b', c', d'.... schneiden; so hat man:

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1....) = A(a, b, c, d....) \equiv (a, b, c, d....) \equiv$$
$$A'(a', b', c', d'....) = A_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....); \text{ also}$$

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1....) = A_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....).$$

Liegt B auf A'', so entspricht dem Strahle A'' von B ein durch p_1'' gehender Strahl, also sind die Geraden A_1, A_1' in Ansehung der den a, b, c, d.... entsprechenden Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... perspektivisch, und da demjenigen Strahle von B, welcher durch p'' geht, die Gerade A_1'' entspricht, so liegt der Projektionspunkt B_1 von A_1, A_1' auf A_1''. In jedem anderen Falle, wo B auf keiner der Geraden A, A', A'' liegt, umhüllen die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... nebst A_1, A_1', A_1'' einen Kegelschnitt $[B_1]$. Liegt der Punkt B auf der Geraden r, welche die Durchschnitte der Parallelstrahlen von A, A' verbindet, so wird der Kegelschnitt $[B_1]$ von der unendlich entfernten Geraden berührt, ist also eine Parabel; und ist B selbst unendlich entfernt, so berührt $[B_1]$ die Gerade r_1, welche die Durchschnitte der Parallelstrahlen von A_1, A_1' verbindet.

Die drei Geraden A, A', A'' und A_1, A_1', A_1'' werden Hauptlinien, die Punkte p, p', p'' und p_1, p_1', p_1'' Hauptpunkte, die von ihnen gebildeten Dreiecke Hauptdreiecke, und je zwei gleichmarkirte Hauptlinien und Hauptpunkte, wie A'', A_1''; p', p_1'; A'', p_1'', zugeordnete genannt.

1. Einem jeden Punkte, welcher auf einer Hauptlinie der einen Ebene liegt, entspricht wieder ein Punkt der zugeordneten Hauptlinie der anderen Ebene.

2. Einem jeden Strahle eines Hauptpunktes der einen Ebene entspricht ein und dieselbe Gerade, nämlich die zugeordnete Hauptlinie der anderen Ebene.

3. Einem jeden Punkte, welcher auf keiner Haupt linie liegt, entspricht ein Kegelschnitt, welcher vo den drei Hauptlinien der anderen Ebene und von den den Strahlen des ersteren entsprechenden Gerade berührt wird, und umgekehrt. Dieser Kegelschnitt is eine Parabel, wenn jener Punkt auf der mit r (r_1) be zeichneten Geraden liegt.

Es würde langweilig sein, diese Untersuchung noch weiter z verfolgen, indem man sich bereits aus diesem Anfang derselbe überzeugt, dass dieselbe kaum mehr als eine wiederholte Erzäh lung der unter α. gewonnenen Resultate in anderem Gewande lie fern würde. Der Leser kann sich sogleich in den Besitz des hie zu Gewinnenden setzen, wenn er in den früheren Betrachtunge und Lehrsätzen die Ausdrücke: Punkt, Hauptpunkt, Gerade Hauptlinie, Curve $n$ter Ordnung oder Klasse, Punkt oder Tan gente einer Curve, $n$facher Punkt, Rückkehrpunkt u. s. w. resp mit den Ausdrücken: Gerade, Hauptlinie, Punkt, Hauptpunkt Curve $n$ter Klasse oder Ordnung, Tangente oder Punkt einer Curve $n$fache Tangente, Wendungstangente u. s. w. vertauscht. Nur i einem besonderen Falle stellt sich Eigenthümliches heraus: Sin nämlich sowohl die Geraden A, A_1 als die Geraden A', A_1' pro jektivisch-ähnlich oder gleich, so entsprechen sich die un endlich entfernten Punkte derselben, und folglich auch die unend lich entfernten Geraden ihrer Ebenen gegenseitig: die Gerade A'' und A_1'' sind also in Ansehung ihrer entsprechenden Punkt ebenfalls ähnlich; jeder Parabel, welche die drei Hauptlinien de einen Ebene berührt, entspricht ein unendlich entfernter Punk der anderen, und jeder Parabel, welche bloss zwei Hauptlinie berührt, entspricht wieder eine Parabel.

γ.

Ein System von Punkten und ein System von Geraden.

§. 17.

Von der Betrachtung dieser beiden Systeme gilt fast dassel als von der der beiden vorigen. Man erhält die Eigenschaften de selben, wenn man in α. die Ausdrücke für die Elemente der ein Ebene unverändert lässt, dagegen die für die Elemente der and ren mit den so eben genannten vertauscht. Nur dem §. 14. ste hier durchaus kein ähnlicher zur Seite, und das Analogon d Frage über die in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte dürf wenigstens kein besonderes Interesse darbieten. Wichtiger dag gen wäre es zu untersuchen: welchem Orte diejenigen Punkte d einen Ebene angehören, deren entsprechende Geraden durch die Punkte selber gehen? und umgekehrt; indem dieselbe Frage reciprok-verwandte Figuren von besonderer Bedeutung ist. Schwe lich aber dürfte dieselbe hier ohne Hülfe der algebraischen An lysis beantwortet werden können, wesshalb ich sie übergehe.

Zweite Art
der höheren geometrischen Verwandtschaften.

§. 18.

Es seien jetzt die in §. 4. betrachteten zwei Paar projektivische Strahlbüschel B, B_1 und B', B_1' so beschaffen, dass zwar dem gemeinschaftlichen Strahle P'' von B, B', insofern er zu B' gehnet wird, in B_1' wiederum der gemeinschaftliche Strahl P_1'' von B_1, B_1' entspreche, d. h. dass sowohl P mit P'' als auch mit P_1'' zusammenfalle; dass dagegen dem Strahle P'' des Strahlbüschels B ein von P_1'' verschiedener Strahl P_1' in B_1, und umgekehrt: dem Strahle P_1'' von B_1 ein von P'' verschiedener Strahl P' in B entspreche. In diesem Falle muss einem jeden Punkte von P'' der einzige Punkt B_1, und einem jeden Punkte von P' der einzige Punkt B_1'; und ebenso einem jeden Punkte von P_1'' der Punkt B, und einem jeden von P_1' der Punkt B' entsprechen. Einer jeden Geraden A der Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht in $\mathfrak{E}_1$ offenbar ebenso wie früher ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die Punkte B_1, B_1' geht; weil aber jetzt denjenigen zwei Strahlen von B, B', welche nach dem Durchschnitte von A und P'' gerichtet sind, in B_1, B_1' die Strahlen P_1', P_1'' entsprechen, so muss, zufolge Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. II., der Kegelschnitt $[A_1]$ die Hauptlinie P_1' in B_1 berühren. Und umgekehrt: wird jedem Kegelschnitt, welcher durch die Hauptpunkte B, B' geht und die Hauptlinie P' berührt, in der anderen Ebene eine Gerade entsprechen. Dagegen entspricht jedem Kegelschnitt, welcher durch B, B' geht, aber P' nicht berührt, zwar wiederum ein Kegelschnitt, welcher durch B_1, B_1' geht, der aber die Hauptlinie P_1' nicht berührt.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine Curve der $n$ten Ordnung, welche durch keinen der Hauptpunkte B, B' gehe, und es sei $\mathfrak{C}_1$ die ihr entsprechende Curve; so entspricht den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit P'' gemein hat, ein $n$facher Punkt B_1, und den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit P' gemein hat, ein $n$facher Punkt B_1'. Einer jeden Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$ entspricht ein Kegelschnitt, welcher mit $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen $2n$ Punkte, welche nicht in B, B' fallen, gemein hat; also wird $\mathfrak{C}_1$ von dieser Geraden in $2n$ Punkten geschnitten, ist folglich von der $2n$ten Ordnung. Demnach hat jeder Strahl des Punktes B_1 ausser diesem $n$fachen Punkte noch n Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Der Strahl P_1' aber kann keine Punkte der Curve besitzen, welche nicht mit B_1 zusammenfallen, weil sonst die Curve $\mathfrak{C}$ durch den Punkt B' gehen müsste, was gegen die Annahme ist; also sind längs P_1' ausser jenen n Punkten noch n Punkte mit B_1 vereinigt. Dennoch aber ist B_1 kein $2n$facher Punkt; weil sonst auch alle übrigen Strahlen desselben ausser ihm keinen Punkt mit $\mathfrak{C}_1$ gemein haben könnten.

Denkt man sich nämlich die jetzt in Rede stehende Art der Verwandtschaft aus der ersten durch allmähligen Uebergang entstanden, indem die Hauptlinien P, P_1 immer kleinere Winkel mit P', P_1'' bilden, so sieht man, dass zwar längs der festen Geraden P_1' ein jeder der n Punkte, welche den $n$fachen Punkt B_1'' bildeten, sich mit einem der Punkte, welche den $n$fachen Punkt B_1

bilden, nämlich mit dem demselben Zweige angehörenden, nigt hat, und folglich längs P_1' $2n$ Punkte der Curve liegen; aber eine solche Vereinigung zweier Punkte auf keinem a Strahle des Punktes B_1 stattfindet. Ferner ersieht man hi dass die Hauptlinie P_1' die n Zweige der Curve, welche dur (und B_1'') gehen, im Punkte B_1 berührt, und folglich diese Z selber einander in B_1 berühren, gleichwohl aber dieser Punk Rückkehrpunkt, sondern nur ein vielfacher Punkt überhau weil derselbe nicht den unmittelbaren Uebergang von einem Z zum anderen bildet, vielmehr der die Curve beschreibende sich continuirlich und auf demselben Zweige verharrend dur hindurch bewegt und erst später wieder auf einem anderen Z nach B_1 gelangt. Dies letztere erhellt auch aus dem Ums dass bei jenem allmähligen Uebergange nur die Geraden, v den Punkt B'' mit den Durchschnitten von $\mathfrak{C}$ und P'' verb sich zu vereinigen streben, diese Durchschnitte selber aber rückt und getrennt von einander bleiben, weshalb auch die vereinigten n Punkte noch immer als diskrete Punkte der anzusehen sind. Man nennt diejenige Tangente einer Curve, welcher mehr als eine Berührung stattfindet, eine vielfache gente derselben, und zwar in dem Falle, wenn zwei oder m der Berührungspunkte zusammenfallen, eine Wendungstang und den gemeinschaftlichen Berührungspunkt einen Wendu punkt der Curve; insbesondere gelten die beiden letzten drücke mit Vorzug, wenn alle Berührungspunkte einer vielf Tangente sich vereinigen. Man sieht sogleich, dass die vielf Tangenten, die Wendungstangenten und die Wendungspunk Curven einer Klasse dasselbe sind, als die vielfachen Punkt Rückkehrpunkte und die Tangenten in derselben für Curven Ordnung. Im Falle der Curve $\mathfrak{C}_1$ ist demnach der Punkt B vollkommener Wendungspunkt, und die Hauptlinie P_1' ist ein kommene Wendungstangente. Es gibt aber auch Fälle, w nur theilweise ein vielfacher Punkt und theilweise ein Wend punkt ist.

Geht nämlich die Curve $\mathfrak{C}$ $p$mal durch B und $q$mal durc so ist die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-(p+q))$ten nung, besitzt in B_1' einen $(n-p)$fachen und in B_1 einen $(n-q)$f Punkt, und längs P_1' vereinigen sich $n-(p+q)$ Punkte mit gleichen Anzahl der bereits in B_1 vereinigten Punkte. Es sen sich also in B_1 $n-(p+q)$ Zweige der Curve berühren, rend die übrigen p Zweige die letzteren und einander in di Punkte durchschneiden.

Verfolgt man, wozu hier kein Raum mehr ist, die in § und §. 12. angestellten Betrachtungen, so wird man finden, da Punkt einer Curve, in welchem sich $n-(p+q)$ Zweige beri und von p Zweigen geschnitten werden, dieselbe Geltung ha zwei Punkte, von denen der eine ein $(n-q)$facher und der a ein $(n-(p+q))$facher Punkt ist.

XIV.

Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in Band VI. Heft 1. dieses Archives.

Von dem

Herrn Doctor Dippe,

Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

Der Herr Herausgeber dieses Archives hat die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in einer Weise gegeben, welche von den Mängeln der Darstellung dieses Gegenstandes in unsern Lehrbüchern zwar frei ist, in mir aber ein Bedenken darüber zurückgelassen hat, ob dieselbe für den Schulunterricht durchweg geeignet sei. Man soll nämlich, um die Gleichung $x^3=ax+b$ aufzulösen,

$$\begin{aligned} x&=(p+q\sqrt{-1})+(p_1+q_1\sqrt{-1})\\ &=(p+p_1)+(q+q_1)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

setzen, darauf

$$\begin{aligned} x^3&=3(p+q\sqrt{-1})(p_1+q_1\sqrt{-1})\{p+p_1+(q+q_1)\sqrt{-1}\}\\ &\quad+(p+q\sqrt{-1})^3+(p_1+q_1\sqrt{-1})^3\\ &=3(p+q\sqrt{-1})(p_1+q_1\sqrt{-1})x\\ &\quad+(p+q\sqrt{-1})^3+(p_1+q_1\sqrt{-1})^3 \end{aligned}$$

entwickeln, und hierauf zur Bestimmung von p, p_1, q, q_1 die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} &pp_1-qq_1=\tfrac{1}{3}a,\ pq_1+qp_1=0;\\ &p^3+p_1{}^3-3pq^2-3p_1q_1{}^2=b,\\ &q^3+q_1{}^3-3p^2q-3p_1{}^2q_1=0 \end{aligned}$$

herleiten. Nun erst richtet sich die Untersuchung auf die Auffindung einer reellen Wurzel.

Dieser Anfang scheint mir für Schüler schwierig und abschreckend. Die Auflösung quadratischer Gleichungen ist ihnen so leicht geworden und beruht auf einem so einfachen Gedanken, der sich ihnen mit Nothwendigkeit aufgedrängt hat, dass sie Aehnliches auch bei den cubischen Gleichungen erwarten. Die sofortige Einführung des Imaginären muss sie nothwendig befremden, da ihnen dasselbe immer noch als Ausnahme erscheint, und ihnen der Gedanke, dass die Form $p+q\sqrt{-1}$ die allgemeinste Zahlform ist, zwar bekannt aber noch nicht geläufig ist. Sodann erschrecken sie vor den Schwierigkeiten, wenn ihnen statt einer leicht aufzufassenden Gleichung vier neue, dem Anscheine nach viel schwierigere, entgegen treten; und in der Muthlosigkeit, die sie erfasst, können sie keinen Schritt selbstständig vorwärts thun, und höchstens den Lehrer bewundern, der mit geschickter Hand die Schwierigkeiten zu beseitigen weiss.

Wenn ich im Folgenden den oft behandelten Gegenstand nochmals aufnehme, so geschieht dies in der Absicht, die Resultate meiner Erfahrungen über denselben mitzutheilen, was gewiss öfter von den Lehrern geschehen könnte, zum Nutzen und Frommen unseres Unterrichts und unserer Lehrbücher.

Den Schülern, denen man cubische Gleichungen vortragen will, sind die Sätze $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$, $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$ bekannt, und die quadratischen Gleichungen geläufig; man wird also ohne Schwierigkeit die drei Wurzeln der reinen cubischen Gleichung finden.

Wenn man die gemischte quadratische Gleichung auch zuerst dadurch gelöst hat, dass man die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate machte, so wird man es doch nicht versäumen dürfen,

$$x^2+ax+b=0$$

auf eine reine quadratische Gleichung zu reduciren, indem man $x=y+z$ setzt, und z so bestimmt, dass der Coefficient von y Null werde. Dann geht man an die Behandlung von

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

so werden die Schüler den Rath geben, $x=y+z$ zu setzen, und z so zu bestimmen, dass y^2 wegfalle. Man findet dann

$$1)\quad y^3+py+q=0.$$

Sicher wird nun der eine oder der andere den Rath ertheilen, eine solche Substitution nochmals vorzunehmen, $y=u+v$ zu setzen, um auch die erste Potenz der Unbekannten wegzuschaffen, und zu einer reinen cubischen Gleichung zu gelangen. Ich pflege solchem Rathe zu folgen, und setze

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3, \\ py &= \quad\quad pu+pv, \\ q &= \quad\quad\quad q; \end{aligned}$$

folglich:

$$2)\quad 0=u^3+3v\,.\,u^2+(3v^2+p)u+(v^3+pv+q).$$

s erhellet dann, dass man durch $3v^2+p=0$ zu einer Glei- $u^3+\alpha u^2+\beta=0$ gelangen würde, so wie, dass nicht zugleich $=0$ und $3v=0$ sein kann, wenn nicht p selbst Null ist, wenn man nicht schon eine reine cubische Gleichung hat. n muss der Lehrer weiter helfen: Die Aufgabe, die Wur- on $y^3+py+q=0$ zu finden, ist gelöst, wenn man u und v stimmen kann, dass der Gleichung 2) Genüge geschieht. estimmung zweier Unbekannten gebraucht man zwei Glei- n. Diese ergeben sich, wenn man die Gleichung 2) so :

$$3)\ (u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0.$$

der Gl. 1) das absolute Glied nicht Null ist, so kann Null Wurzel derselben sein, mithin kann man nicht $u+v=0$ set- Es bleibt also, wenn man der Gl. 3) Genüge leisten will, rig

$$4)\ \begin{cases} u^3+v^3+q=0, \\ 3uv+p=0 \end{cases}$$

zen.

h habe absichtlich vermieden, die Herleitung so zu ordnen: etze $y=u+v$, dann ist

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 \\ &= 3uv(u+v)+u^3+v^3, \end{aligned}$$

uch

$$y^3=3uv\,.\,y+u^3+v^3.$$

eicht man dies mit $y^3=-py-q$, so erhält man $3uv=-p$, $^3=-q$. Dass man nämlich statt $u+v$ wieder rückwärts y ibt, nachdem man eben erst $u+v$ statt y gesetzt hat, und u und v doch noch beibehält, erscheint den Schülern immer in Kunstgriff. Schreibt man nun die Gl. 4) in der Form

$$5)\ \begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}: \end{cases}$$

r gar $\alpha+\beta=-q$, $\alpha\beta=-\dfrac{p^3}{27}$, so sind die Schüler auf ganz unstem Boden und sehen das Ziel schon vor Augen. Man kann ehe man weiter geht, die Frage aufwerfen: werden α und β, hin u und v immer reell sein, und durch den ihnen geläufi- Satz

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$$

jene Frage dahin beantworten lassen, dass α und β reell sein rden, wenn $q^2+\dfrac{4p^3}{27}$ positiv oder Null ist, imaginär dagegen.

wenn dieser Werth negativ ist. Für alle Fälle aber ist doch

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}};$$

und $u+v$ eine Wurzel der Gleichung $y^3+py+q=0$.

Um die beiden andern Wurzeln zu finden, subtrahirt man entweder von dem Ausdrucke y^3+py+q den Werth $(u+v)^3+p(u+v)+q$, welcher Null ist, und erhält

$$y^3+py+q=(y-(u+v))(y^2+(u+v)y+(u+v)^2+p);$$

oder man dividirt y^3+py+q durch $y-(u+v)$, und ich ziehe dies letztere vor, weil die Schüler hierbei sicherer gehen. Man erhält so den Quotienten $y^2+(u+v)y+(u+v)^2+p$, und den Rest $(u+v)^3+p(u+v)+q$, welcher Null ist, mithin für y^3+py+q das obige Product.

Sucht man die Werthe von y, welche dessen quadratischen Factor zu Null machen, so erhält man, nach Berücksichtigung von $p=-3uv$,

$$-\frac{u+v}{2}\pm\frac{u-v}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1},$$

also imaginäre Wurzeln, wenn u und v reell sind. Es ist gut, wenn man den Grund hiervon dadurch aufzeigt, dass man jenen quadratischen Factor auf die Form bringt:

$$(y+\frac{u+v}{2})^2+3(\frac{u+v}{2})^2.$$

Nun wird man den irreducibeln Fall betrachten müssen, und gleich darauf hinweisen, dass u und v zwar imaginär sind, dass aber u^3 und v^3 conjugirte imaginäre Ausdrücke sind, und dass, wenn eine genauere Untersuchung auch u und v als solche erkennen liesse, nicht bloss $u+v$, sondern auch $(u-v)\sqrt{-1}$ reell sein, dass also in diesem Falle drei reelle Wurzeln vorhanden sein würden, deren Berechnung man sich entweder noch vorbehält, oder, was ich vorziehe, sofort ausführt, indem man den binomischen Lehrsatz zu Hülfe nimmt. Die Erfahrung hat mir gezeigt, dass die Schüler kaum irgend einer Reihenentwickelung mit gespannterem Interesse folgen, als gerade dieser. Es liegt dies wohl mit darin, dass sie eine so lebhafte Ueberzeugung von der Nothwendigkeit der Aufgabe selbst haben.

Hierauf habe ich gewöhnlich erst die Vereinfachung der cardanischen Formel durch die goniometrischen Functionen vorgenommen, und liess mich dann durch den Versuch, dem irreducibeln Falle dieselbe Wohlthat zu erzeigen, zum Ausdruck

$$\sqrt[3]{[r(\cos\omega\pm\sin\omega\sqrt{-1})]}$$

führen, um bei dieser Gelegenheit von den imaginären Ausdrücken der Form $\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}$ das Wenige zu lehren, was man gebraucht, um für $u+v$ die bekannte Formel zu finden. Für die

beiden andern Wurzeln ergeben sich die einfachen bekannten Ausdrücke, wenn man beachtet, dass $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist.

Die Beziehung zwischen den goniometrischen Functionen des dreifachen und einfachen Winkels pflege ich beim Vortrage der Trigonometrie zu benutzen, um die Gleichung $x^3 - px \pm q = 0$ aufzulösen. So natürlich dies den Schülern erscheint, und soviel Freude es ihnen macht, von den eine cubische Gleichung bildenden goniometrischen Formeln diese Anwendung zu machen, gerade so wunderbar kommt es ihnen vor, wenn man umgekehrt bei der Auflösung der cubischen Gleichungen in dem Momente, wo ihnen das Imaginäre im Wege steht, die ihnen vielleicht wieder entfallene Formel

$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi$$

zu Hülfe ruft. Diese Art Bewunderung soll die Mathematik, wie mir scheint, eher vermeiden als erstreben, denn sie stählt die Kräfte der Lernenden eben so wenig, als sie ihren Muth hebt. Etwas ganz Anderes ist es, wenn man bei der Auflösung der Gleichungen den Umstand benutzt, dass jeder positive ächte Bruch dem Quadrat eines Sinus gleich ist, und die Lernenden dann sehen, wie in Folge dieser Substitution eine überraschende Vereinfachung gewonnen wird; denn hier wird der Ausgang von einem einfachen Gedanken gemacht, von dem man einsieht, dass er auch in andern Fällen die trefflichsten Dienste leisten muss.

XV.

Ueber Poinsot's Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen.

Von

dem Herausgeber.

In dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Février. 1845. p. 48. hat Poinsot eine Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen vorgetragen, deren Princip so einfach ist, dass es sich kaum denken lässt, dass dieselbe

nicht schon einmal anderswo entwickelt worden sein sollte. Poinsot bezeichnet diese Methode aber als neu, und jedenfalls ist dieselbe nicht so allgemein bekannt, wie sie nach meiner Meinung in gewisser Rücksicht zu sein verdient, weshalb wir ihr hier, mit mehreren eigenen Bemerkungen und Zusätzen und überhaupt in grösstentheils eigenthümlicher Entwickelung, die folgenden Seiten widmen wollen.

Wenn A und B zwei beliebige gleichartige Grössen bezeichnen, deren grösstes gemeinschaftliches Maass gefunden werden soll, so nehme man die eine, etwa A, von der anderen B so oft weg, als es angeht. Bleibt dann ein Rest, welcher kleiner als A ist, so bilde man das Zweifache $2B$ von B, und nehme A von $2B$ wieder so oft weg, als es angeht. Bleibt bei dieser Operation wieder ein Rest, welcher kleiner als A ist, so bilde man das Dreifache $3B$ von B, und nehme A von $3B$ so oft weg, als es angeht. Findet man nun bei der Fortsetzung dieser Operation endlich ein Vielfaches mB von B, von welchem A sich n Mal, wo n eine ganze Zahl bezeichnet, wegnehmen lässt, ohne dass ein Rest, welcher kleiner als A ist, übrig bleibt, d. h. findet man endlich ein Vielfaches mB von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen nA von A gleich ist, und ist mB das niedrigste einem gewissen Vielfachen nA von A gleiche Vielfache von B, welches es giebt, so ist der $m$te Theil von A, d. h. $\frac{A}{m}$, das grösste gemeinschaftliche Maass der beiden Grössen A und B, und dasselbe also auf diese Weise gefunden. Kommt man aber bei Fortsetzung des obigen Verfahrens niemals auf ein Vielfaches von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, so sind die beiden Grössen A und B incommensurabel, d. h. es giebt für dieselben gar kein gemeinschaftliches Maass.

Um dies zu beweisen, wollen wir zuerst annehmen, dass man bei der Anwendung des obigen Verfahrens ein Vielfaches mB von B gefunden habe, welches von A genau gemessen wird, oder einem gewissen Vielfachen nA von A gleich ist, und dass mB das niedrigste einem gewissen Vielfachen nA von A gleiche Vielfache von B sei, welches es giebt. Dann lässt sich auf folgende Art leicht zeigen, dass der $m$te Theil von A, d. h. $\frac{A}{m}$, das grösste gemeinschaftliche Maass der beiden Grössen A und B ist. Da nämlich $A=m\frac{A}{m}$ ist, so wird A von $\frac{A}{m}$ gemessen. Weil ferner nach der Voraussetzung $mB=nA$ ist, so ist $B=n\frac{A}{m}$, und es wird folglich auch B von $\frac{A}{m}$ gemessen. Also ist $\frac{A}{m}$ ein gemeinschaftliches Maass von A und B. Gäbe es nun ein gemeinschaftliches Maass $M>\frac{A}{m}$ von A und B, so dass, wenn μ und ν zwei ganze Zahlen bezeichnen, $A=\mu M$ und $B=\nu M$ wäre, so wäre, weil nach der Voraussetzung $A<mM$ ist, $\mu M<mM$, folglich $\mu<m$. Weil aber $B=\nu M$ ist, so ist $\mu B=\mu\nu M=\nu.\mu M=\nu A$, und es gäbe also

ein niedrigeres Vielfaches μB von B als mB, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, was gegen die Voraussetzung streitet. Daher kann es kein grösseres gemeinschaftliches Maass der beiden Grössen A und B als $\frac{A}{m}$ geben, und $\frac{A}{m}$ ist folglich das grösste gemeinschaftliche Maass von A und B, welches der erste Theil unserer Behauptung war.

Wenn die Grössen A und B commensurabel sind, d. h. wenn dieselben überhaupt ein gemeinschaftliches Maass M haben, so dass, wenn μ und ν ganze Zahlen bezeichnen, $A=\mu M$ und $B=\nu M$ ist, so ist $\mu B=\mu\nu M=\nu.\mu M=\nu A$, und es giebt also unter der gemachten Voraussetzung immer ein Vielfaches μB von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen νA von A gleich ist; man muss folglich in diesem Falle bei Anwendung des obigen Verfahrens offenbar immer endlich einmal auf ein Vielfaches von B kommen, welches von A genau gemessen wird, oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist. Wenn man also bei Anwendung des obigen Verfahren niemals auf ein Vielfaches von B kommt, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, so sind die beiden Grössen A und B incommensurabel, welches der zweite Theil unserer Behauptung war.

Bei Anwendung des obigen Verfahrens auf zwei ungleiche ganze Zahlen a und b dividirt man mit der einen, etwa mit a, in die andere b hinein. Bleibt bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben b und dividirt in die Summe wieder mit a hinein. Bleibt auch bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben wieder b und dividirt in die Summe mit a hinein. Diese Operation setzt man so lange fort, bis man auf einen verschwindenden Rest kommt, was nach dem Vorhergehenden im vorliegenden Falle offenbar immer endlich einmal Statt finden muss, weil zwei ganze Zahlen jederzeit commensurabel sind. Dann dividirt man mit der Anzahl der ausgeführten Divisionen in a hinein, und der auf diese Weise erhaltene Quotient ist nach dem oben Bewiesenen das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden ganzen Zahlen a und b.

Folgendes Schema stellt diese Operation im Allgemeinen dar:

$$1)\quad \begin{cases} b=aq_1+r_1,\ 0<r_1<a; \\ r_1+b=aq_2+r_2,\ 0<r_2<a; \\ r_2+b=aq_3+r_3,\ 0<r_3<a; \\ r_3+b=aq_4+r_4,\ 0<r_4<a; \\ \text{u. s. w.} \\ r_{m-2}+b=aq_{m-1}+r_{m-1},\ 0<r_{m-1}<a; \\ r_{m-1}+b=aq_m. \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m ist, so ist $\frac{a}{m}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und b.

Verwechselt man, was natürlich verstattet ist, a und b mit einander, so erhält man folgendes Schema:

$$2)\quad \begin{cases} a = bq_1' + r_1', & 0 < r_1' < b; \\ r_1' + a = bq_2' + r_2', & 0 < r_2' < b; \\ r_2' + a = bq_3' + r_3', & 0 < r_3' < b; \\ r_3' + a = bq_4' + r_4', & 0 < r_4' < b; \\ \text{u. s. w.} \\ r'_{m'-2} + a = bq'_{m'-1} + r'_{m'-1}, & 0 < r'_{m'-1} < b; \\ r'_{m'-1} + a = bq'_{m'}. \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m' ist, $\frac{b}{m'}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a un

Weil also sowohl $\frac{a}{m}$, als auch $\frac{b}{m'}$, das grösste gemei liche Maass von a und b ist, so ist natürlich

$$3)\quad \frac{a}{m} = \frac{b}{m'},$$

also $m'a = mb$; und weil nun

$$a = m\frac{a}{m},\quad b = m'\frac{b}{m'}$$

oder

$$a : \frac{a}{m} = m,\quad b : \frac{b}{m'} = m'$$

ist, so müssen m und m' nothwendig relative Primzahle weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ offenbar nic grösste gemeinschaftliche Maass von a und b sein könnte. der Gleichung $m'a = mb$ geht aber m in $m'a$ und m' in m also muss nach einem sehr bekannten Satze, weil m und m tive Primzahlen sind, m in a und m' in b aufgehen, od grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ der beiden ganzen a und b ist jederzeit eine ganze Zahl.

Durch Addition der Gleichungen 1) erhält man, wenn m hebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$4)\quad mb = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_m);$$

und eben so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 2) man wieder aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichu

$$5)\quad m'a = b(q_1' + q_2' + q_3' + q_4' + \ldots + q'_{m'}).$$

Also ist nach 4):

$$6)\ \frac{a}{m}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

und nach 5):

$$7)\ \frac{b}{m'}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}.$$

Nach 3) und 7) ist

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}},$$

und nach 3) und 6) ist

$$\frac{b}{m'}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Folglich ist jederzeit

$$8)\ m=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$9)\ m'=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m.$$

Also ist auch immer

$$10)\ a:\frac{a}{m}=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$11)\ b:\frac{b}{m'}=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m;$$

daher in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückte Werth des Bruches $\frac{a}{b}$ ist folglich jederzeit

$$\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir die beiden ganzen Zahlen 77 und 91, und setzen demzufolge $a=77$ und $b=91$.

Bringen wir nun zuvörderst das Schema 1) in Anwendung, so haben wir die folgende Rechnung auszuführen. Die derselben im Nachstehenden gegebene Anordnung hat man sich für alle ähnlichen Fälle zu merken, da nach unserer Ueberzeugung schon der grossen Deutlichkeit der Sache wegen sich eine bessere nicht finden lassen dürfte.

77|91|1
77
14
91
77|105|1
77
28
91
77|119|1
77
42
91
77|133|1
77
56
91
77|147|1
77
70
91
77|161|2
154
7
91
77|98|1
77
21
91
77|112|1
77
35
91
77|126|1
77
49
91
77|140|1
77
63
91
77|154|2
154
0

Hier ist $m=11$. A
$\frac{a}{m}=\frac{77}{11}=7$ das grös
meinschaftliche Maas
$a=77$ und $b=91$.

Das Schema 2) führt zu der folgenden Rechnung:

91|77|0
0
77
77
91|154|1
91
63
77
91|140|1
91
49
77
91|126|1
91
35
77
91|112|1
91
21
77
91|98|1
91
7
77
91|84|0
0
84
77
91|161|1
91
70
77
91|147|1
91
56
77
91|133|1
91
42
77
91|119|1
91
28
77
91|105|1
91
14
77
91|91|1
91
0

Hier ist $m'=13$. Also ist $\frac{b}{m'}=\frac{91}{13}=7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a=77$ und $b=91$.

Im ersten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m$$
$$=1+1+1+1+1+2+1+1+1+1+2=13=m';$$

im zweiten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$
$$=0+1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1+1=11=m,$$

ganz den Gleichungen 9) und 8) entsprechend. Der Ausdruck d
Bruchs $\frac{77}{91}$ in den kleinsten Zahlen ist

$$\frac{77:7}{91:7}=\frac{11}{13}=\frac{m}{m'}=\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

wie es nach dem Obigen sein muss.

Bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maass zweier ganzen Zahlen kann die obige Methode, wie leicht in Augen fällt, in vielen Fällen sehr weitläufig werden, und ste der gewöhnlichen Methode in jeder Beziehung nach. Im obig Falle erfordert die gewöhnliche Methode nur die folgende äusse leichte und kurze Rechnung:

77 | 91 | 1
77
14 | 77 | 5
70
7 | 14 | 2
14
0

Also ist 7 das grösste gemeinschaftliche Maass von 77 und 91, w vorher. Sind die beiden gegebenen Zahlen 43134 und 269087, braucht man nach der gewöhnlichen Methode bloss die folgen Rechnung zu machen:

43134 | 269087 | 6
258804
10283 | 43134 | 4
41132
2002 | 10283 | 5
10010
273 | 2002 | 7
1911
91 | 273 | 3
273
0

Also ist 91 das grösste gemeinschaftliche Maass von 43134 u 269087. In diesem Falle wäre, wenn man $a=43134$, $b=269087$ set

$$\frac{a}{m}=\frac{43134}{m}=91,\ m=\frac{43134}{91}=474;$$

$$\frac{b}{m'}=\frac{269087}{m'}=91,\ m'=\frac{269087}{91}=2957.$$

Bei Anwendung des Schemas 1) würde man also 474, bei Anwendung des Schemas 2) dagegen sogar 2957 Divisionen zu machen haben, und die praktische Anwendung der obigen Methode würde folglich so gut wie unmöglich sein.

Dagegen bin ich der Meinung, dass in allen den Fällen, wo man durch wirkliche Abmessung das grösste gemeinschaftliche Maass zweier geraden Linien A und B mit möglichster Annäherung bestimmen soll, Poinsots Methode nicht ohne Werth ist, und vor der gewöhnlichen Methode des Euklides entschiedene Vorzüge besitzt. Man braucht nämlich nur eine der beiden gegebenen Linien, etwa die Linie B, auf einer unbestimmt langen geraden Linie von einem beliebigen Anfangspunkte an mehrere Male, und in einer des Folgenden wegen hinreichenden Anzahl, neben einander aufzutragen, worauf man von demselben Anfangspunkte an auf derselben geraden Linie die zweite gerade Linie A so oft neben einander aufträgt, bis ein Punkt dieser zweiten Theilung mit einem Punkte der ersten Theilung entweder völlig genau oder doch so genau, dass der Unterschied nicht mehr sinnlich wahrnehmbar ist, zusammenfällt. Findet dies nun, indem man sich den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der beiden Theilungen mit 0 bezeichnet denkt, zuerst bei dem $m$ten Theilpunkte der ersten Theilung Statt, so theilt man die Linie A in m gleiche Theile ein, und ein solcher Theil ist dann das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden gegebenen geraden Linien A und B entweder völlig genau oder doch mit einer so grossen Annäherung, als die Genauigkeit der angewandten Instrumente und die zu Gebote stehende Schärfe der Sinne zu erreichen gestatten.

Dass ein ganz ähnliches Verfahren auch bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Kreisbogen in Anwendung gebracht werden kann, fällt auf der Stelle in die Augen, wenn man nur überlegt, dass man von jedem beliebigen Punkte in der Kreislinie an die ganze Peripherie ungehindert willkührlich oft durchlaufen kann.

Endlich frägt sich noch, ob man auf die im Obigen entwickelten Principien nicht mit Vortheil für die Kürze und Deutlichkeit die Beweise mancher, die Incommensurabilität betreffender Sätze gründen kann, was, wenn es der Fall wäre, der obigen Methode jedenfalls in dieser Rücksicht zu besonderer Empfehlung gereichen würde. Desfallsige Versuche zu machen, überlasse ich den Lesern, werde denselben aber, wenn sie gelingen sollten, jederzeit gern eine Stelle im Archive einräumen.

XVI.

Ueber eine Auflösung der unbestim ten Gleichungen des ersten Gra zwischen zwei unbekannten Gröss

Von

dem Herausgeber.

An die in dem vorhergehenden Aufsatze angestellten Be tungen lässt sich, wenn man dieselben noch etwas weiter al in diesem Aufsatze geschehen ist verfolgt, die Entwickelung Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grad schliessen, welche von mir bei Anfertigung des vorhergeh Aufsatzes, der auch mehrere mir eigenthümliche Betracht enthält, gefunden wurde, und mir der Beachtung nicht gan werth zu sein scheint, wenn sie auch öfters in ziemlich weitl Rechnungen führt.

Betrachten wir nämlich wieder das aus dem vorhergeh Aufsatze bekannte Schema

$$b = aq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < a;$$
$$r_1 + b = aq_2 + r_2,\ 0 < r_2 < a;$$
$$r_2 + b = aq_3 + r_3,\ 0 < r_3 < a;$$
$$r_3 + b = aq_4 + r_4,\ 0 < r_4 < a;$$

u. s. w.

$$r_{m-2} + b = aq_{m-1} + r_{m-1},\ 0 < r_{m-1} < a;$$
$$r_{m-1} + b = aq_m;$$

so überzeugen wir uns auf der Stelle, dass die nicht versc denden Reste

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4, \ldots r_{m-1}$$

in allen Fällen sämmtlich unter einander ungleich sein mü weil, wenn unter diesen Resten zwei einander gleiche, die w Allgemeinen durch r_h und r_{h+i} bezeichnen wollen, vorkämen, der Natur des obigen Verfahrens offenbar die nicht verschwi den Reste

$$r_h,\ r_{h+1},\ r_{h+2},\ r_{h+3},\ldots r_{h+i-1}^{s}$$

endliche wiederkehren müssten, man also niemals auf einen vindenden Rest kommen könnte, welches doch bekanntlich it endlich einmal der Fall sein muss.
id nun a und b relative Primzahlen, so ist deren grösstes schaftliches Maass $\frac{a}{m}$ (m. s. den vorhergehenden Aufsatz) die , und folglich $m=a$. Also können offenbar die $a-1$ nicht rindenden, sämmtlich unter einander ungleichen Reste

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

alle kleiner als a sind, nur die in einer gewissen Ordnung nenen ganzen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ a-1$$

nd es muss also unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

n Fällen die Einheit vorkommen.
eichnen wir jetzt denjenigen unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

r der Einheit gleich ist, durch r_k, und setzen also $r_k=1$, en wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
b &= aq_1+r_1,\\
r_1+b &= aq_2+r_2,\\
r_2+b &= aq_3+r_3,\\
r_3+b &= aq_4+r_4,\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{k-2}+b &= aq_{k-1}+r_{k-1},\\
r_{k-1}+b &= aq_k+1;
\end{aligned}$$

deren Addition sich die Gleichung

$$bk=a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)+1$$

$$bk-a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)=1$$

t.
ben wir nun die unbestimmte Gleichung des ersten Grades en zwei unbekannten Grössen

$$bx-ay=1,$$

und b relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern nach Vorhergehenden offenbar die Werthe

$$2)\quad \begin{cases} a = bq_1' + r_1',\ 0 < r_1' < b; \\ r_1' + a = bq_2' + r_2',\ 0 < r_2' < b; \\ r_2' + a = bq_3' + r_3',\ 0 < r_3' < b; \\ r_3' + a = bq_4' + r_3',\ 0 < r_4' < b; \\ \text{u. s. w.} \\ r'_{m'-2} + a = bq'_{m'-1} + r'_{m'-1},\ 0 < r'_{m'-1} < b; \\ r'_{m'-1} + a = bq'_{m'}. \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m' ist, s
$\frac{b}{m'}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und

Weil also sowohl $\frac{a}{m}$, als auch $\frac{b}{m'}$, das grösste gemeins
liche Maass von a und b ist, so ist natürlich

$$3)\quad \frac{a}{m} = \frac{b}{m'},$$

also $m'a = mb$; und weil nun

$$a = m\frac{a}{m},\ b = m'\frac{b}{m'}$$

oder

$$a : \frac{a}{m} = m,\ b : \frac{b}{m'} = m'$$

ist, so müssen m und m' nothwendig relative Primzahlen
weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ offenbar nicht
grösste gemeinschaftliche Maass von a und b sein könnte. W
der Gleichung $m'a = mb$ geht aber m in $m'a$ und m' in mb
also muss nach einem sehr bekannten Satze, weil m und m'
tive Primzahlen sind, m in a und m' in b aufgehen, oder
grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ der beiden ganzen Z
a und b ist jederzeit eine ganze Zahl.

Durch Addition der Gleichungen 1) erhält man, wenn man
hebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$4)\quad mb = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_m);$$

und eben so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 2),
man wieder aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$5)\quad m'a = b(q_1' + q_2' + q_3' + q_4' + \ldots + q'_{m'}).$$

Also ist nach 4):

$$6)\ \frac{a}{m}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

und nach 5):

$$7)\ \frac{b}{m'}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}.$$

Nach 3) und 7) ist

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}},$$

und nach 3) und 6) ist

$$\frac{b}{m'}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Folglich ist jederzeit

$$8)\ m=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$9)\ m'=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m.$$

Also ist auch immer

$$10)\ a:\frac{a}{m}=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$11)\ b:\frac{b}{m'}=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m;$$

und der in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückte Werth des Bruches $\frac{a}{b}$ ist folglich jederzeit

$$\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir die beiden ganzen Zahlen 77 und 91, und setzen demzufolge $a=77$ und $b=91$.

Bringen wir nun zuvörderst das Schema 1) in Anwendung, so haben wir die folgende Rechnung auszuführen. Die derselben im nächstehenden gegebene Anordnung hat man sich für alle ähnlichen Fälle zu merken, da nach unserer Ueberzeugung schon der grossen Einfachheit der Sache wegen sich eine bessere nicht finden lassen dürfte.

77|91|1
77
14
91
77|105|1
77
28
91
77|119|1
77
42
91
77|133|1
77
56
91
77|147|1
77
70
91
77|161|2
154
7
91
77|98|1
77
21
91
77|112|1
77
35
91
77|126|1
77
49
91
77|140|1
77
63
91
77|154|2
154
0

Hier ist $m=11$. Al $\frac{a}{m}=\frac{77}{11}=7$ das grösst meinschaftliche Maass $a=77$ und $b=91$.

Das Schema 2) führt zu der folgenden Rechnung:

91|77|0
0
77
77
91|154|1
91
63
77
91|140|1
91
49
77
91|126|1
91
35
77
91|112|1
91
21
77
91|98|1
91
7
77
91|84|0
0
84
77
91|161|1
91
70
77
91|147|1
91
56
77
91|133|1
91
42
77
91|119|1
91
28
77
91|105|1
91
14
77
91|91|1
91
0

Hier ist $m'=13$. Also ist $\frac{b}{m'}=\frac{91}{13}=7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a=77$ und $b=91$.

Im ersten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m$$
$$=1+1+1+1+1+2+1+1+1+1+2=13=m';$$

im zweiten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$
$$=0+1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1+1=11=m,$$

ganz den Gleichungen 9) und 8) entsprechend. Der Ausdruck des Bruchs $\frac{77}{91}$ in den kleinsten Zahlen ist

$$\frac{77:7}{91:7}=\frac{11}{13}=\frac{m}{m'}=\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

wie es nach dem Obigen sein muss.

Bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier ganzen Zahlen kann die obige Methode, wie leicht in die Augen fällt, in vielen Fällen sehr weitläufig werden, und steht der gewöhnlichen Methode in jeder Beziehung nach. Im obigen Falle erfordert die gewöhnliche Methode nur die folgende äusserst leichte und kurze Rechnung:

77 | 91 | 1
77
14 | 77 | 5
70
7 | 14 | 2
14
0

Also ist 7 das grösste gemeinschaftliche Maass von 77 und 91, wie vorher. Sind die beiden gegebenen Zahlen 43134 und 269087, so braucht man nach der gewöhnlichen Methode bloss die folgende Rechnung zu machen:

43134 | 269087 | 6
258804
10283 | 43134 | 4
41132
2002 | 10283 | 5
10010
273 | 2002 | 7
1911
91 | 273 | 3
273
0

Also ist 91 das grösste gemeinschaftliche Maass von 43134 und 269087. In diesem Falle wäre, wenn man $a=43134$, $b=269087$ setzt,

$$\frac{a}{m}=\frac{43134}{m}=91,\ m=\frac{43134}{91}=474;$$

$$\frac{b}{m'}=\frac{269087}{m'}=91,\ m'=\frac{269087}{91}=2957.$$

Bei Anwendung des Schemas 1) würde man also 474, bei Anwendung des Schemas 2) dagegen sogar 2957 Divisionen zu machen haben, und die praktische Anwendung der obigen Methode würde folglich so gut wie unmöglich sein.

Dagegen bin ich der Meinung, dass in allen den Fällen, wo man durch wirkliche Abmessung das grösste gemeinschaftliche Maass zweier geraden Linien A und B mit möglichster Annäherung bestimmen soll, Poinsots Methode nicht ohne Werth ist, und vor der gewöhnlichen Methode des Euklides entschiedene Vorzüge besitzt. Man braucht nämlich nur eine der beiden gegebenen Linien, etwa die Linie B, auf einer unbestimmt langen geraden Linie von einem beliebigen Anfangspunkte an mehrere Male, und in einer des Folgenden wegen hinreichenden Anzahl, neben einander aufzutragen, worauf man von demselben Anfangspunkte an auf derselben geraden Linie die zweite gerade Linie A so oft neben einander aufträgt, bis ein Punkt dieser zweiten Theilung mit einem Punkte der ersten Theilung entweder völlig genau oder doch so genau, dass der Unterschied nicht mehr sinnlich wahrnehmbar ist, zusammenfällt. Findet dies nun, indem man sich den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der beiden Theilungen mit 0 bezeichnet denkt, zuerst bei dem $m$ten Theilpunkte der ersten Theilung Statt, so theilt man die Linie A in m gleiche Theile ein, und ein solcher Theil ist dann das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden gegebenen geraden Linien A und B entweder völlig genau oder doch mit einer so grossen Annäherung, als die Genauigkeit der angewandten Instrumente und die zu Gebote stehende Schärfe der Sinne zu erreichen gestatten.

Dass ein ganz ähnliches Verfahren auch bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Kreisbogen in Anwendung gebracht werden kann, fällt auf der Stelle in die Augen, wenn man nur überlegt, dass man von jedem beliebigen Punkte in der Kreislinie an die ganze Peripherie ungehindert willkührlich oft durchlaufen kann.

Endlich frägt sich noch, ob man auf die im Obigen entwickelten Principien nicht mit Vortheil für die Kürze und Deutlichkeit die Beweise mancher, die Incommensurabilität betreffender Sätze gründen kann, was, wenn es der Fall wäre, der obigen Methode jedenfalls in dieser Rücksicht zu besonderer Empfehlung gereichen würde. Desfallsige Versuche zu machen, überlasse ich den Lesern, werde denselben aber, wenn sie gelingen sollten, jederzeit gern eine Stelle im Archive einräumen.

XVI.

Ueber eine Auflösung der unbestim ten Gleichungen des ersten Gra zwischen zwei unbekannten Gröss

Von

dem Herausgeber.

An die in dem vorhergehenden Aufsatze angestellten Be tungen lässt sich, wenn man dieselben noch etwas weiter al in diesem Aufsatze geschehen ist verfolgt, die Entwickelung Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grad schliessen, welche von mir bei Anfertigung des vorhergeh Aufsatzes, der auch mehrere mir eigenthümliche Betracht enthält, gefunden wurde, und mir der Beachtung nicht gar werth zu sein scheint, wenn sie auch öfters in ziemlich weitl Rechnungen führt.

Betrachten wir nämlich wieder das aus dem vorhergeh Aufsatze bekannte Schema

$$b = aq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < a;$$
$$r_1 + b = aq_2 + r_2,\ 0 < r_2 < a;$$
$$r_2 + b = aq_3 + r_3,\ 0 < r_3 < a;$$
$$r_3 + b = aq_4 + r_4,\ 0 < r_4 < a;$$

u. s. w.

$$r_{m-2} + b = aq_{m-1} + r_{m-1},\ 0 < r_{m-1} < a;$$
$$r_{m-1} + b = aq_m;$$

so überzeugen wir uns auf der Stelle, dass die nicht versc denden Reste

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_{m-1}$$

in allen Fällen sämmtlich unter einander ungleich sein mi weil, wenn unter diesen Resten zwei einander gleiche, die v Allgemeinen durch r_h und r_{h+i} bezeichnen wollen, vorkämen, der Natur des obigen Verfahrens offenbar die nicht verschwi den Reste

$$r_k,\ r_{k+1},\ r_{k+2},\ r_{k+3},\ldots r_{k+i-1}^{f}$$

endliche wiederkehren müssten, man also niemals auf einen windenden Rest kommen könnte, welches doch bekanntlich it endlich einmal der Fall sein muss.
nd nun a und b relative Primzahlen, so ist deren grösstes schaftliches Maass $\frac{a}{m}$ (m. s. den vorhergehenden Aufsatz) die t, und folglich $m=a$. Also können offenbar die $a-1$ nicht windenden, sämmtlich unter einander ungleichen Reste

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

alle kleiner als a sind, nur die in einer gewissen Ordnung nenen ganzen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ a-1$$

nd es muss also unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

n Fällen die Einheit vorkommen.
zeichnen wir jetzt denjenigen unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

r der Einheit gleich ist, durch r_k, und setzen also $r_k=1$, en wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1,\\
r_1 + b &= aq_2 + r_2,\\
r_2 + b &= aq_3 + r_3,\\
r_3 + b &= aq_4 + r_4,\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{k-2} + b &= aq_{k-1} + r_{k-1},\\
r_{k-1} + b &= aq_k + 1;
\end{aligned}$$

deren Addition sich die Gleichung

$$bk = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) + 1$$

$$bk - a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) = 1$$

t.
haben wir nun die unbestimmte Gleichung des ersten Grades hen zwei unbekannten Grössen

$$bx - ay = 1,$$

und b relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern nach Vorhergehenden offenbar die Werthe

$$2)\quad \begin{cases} a = bq_1' + r_1', & 0 < r_1' < b; \\ r_1' + a = bq_2' + r_2', & 0 < r_2' < b; \\ r_2' + a = bq_3' + r_3', & 0 < r_3' < b; \\ r_3' + a = bq_4' + r_4', & 0 < r_4' < b; \\ \text{u. s. w.} & \\ r'_{m'-2} + a = bq'_{m'-1} + r'_{m'-1}, & 0 < r'_{m'-1} < b; \\ r'_{m'-1} + a = bq'_{m'}. & \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m' ist, so ist $\frac{b}{m'}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und b.

Weil also sowohl $\frac{a}{m}$, als auch $\frac{b}{m'}$, das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b ist, so ist natürlich

$$3)\quad \frac{a}{m} = \frac{b}{m'},$$

also $m'a = mb$; und weil nun

$$a = m\frac{a}{m},\quad b = m'\frac{b}{m'}$$

oder

$$a : \frac{a}{m} = m,\quad b : \frac{b}{m'} = m'$$

ist, so müssen m und m' nothwendig relative Primzahlen sein, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ offenbar nicht das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b sein könnte. Wegen der Gleichung $m'a = mb$ geht aber m in $m'a$ und m' in mb auf; also muss nach einem sehr bekannten Satze, weil m und m' relative Primzahlen sind, m in a und m' in b aufgehen, oder das grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ der beiden ganzen Zahlen a und b ist jederzeit eine ganze Zahl.

Durch Addition der Gleichungen 1) erhält man, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$4)\quad mb = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_m);$$

und eben so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 2), wenn man wieder aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$5)\quad m'a = b(q_1' + q_2' + q_3' + q_4' + \ldots + q'_{m'}).$$

Also ist nach 4):

$$6)\ \frac{a}{m}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

und nach 5):

$$7)\ \frac{b}{m'}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}.$$

Nach 3) und 7) ist

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}},$$

und nach 3) und 6) ist

$$\frac{b}{m'}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Folglich ist jederzeit

$$8)\ m=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_m$$

und

$$9)\ m'=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m.$$

Also ist auch immer

$$10)\ a:\frac{a}{m}=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$11)\ b:\frac{b}{m'}=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m;$$

und der in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückte Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ ist folglich jederzeit

$$\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir die beiden ganzen Zahlen 77 und 91, und setzen demzufolge $a=77$ und $b=91$.

Bringen wir nun zuvörderst das Schema 1) in Anwendung, so haben wir die folgende Rechnung auszuführen. Die derselben im nachstehenden gegebene Anordnung hat man sich für alle ähnlichen Fälle zu merken, da nach unserer Ueberzeugung schon der grossen Einfachheit der Sache wegen sich eine bessere nicht finden lassen dürfte.

77|91|1
77
14
91
77|105|1
77
28
91
77|119|1
77
42
91
77|133|1
77
56
91
77|147|1
77
70
91
77|161|2
154
7
91
77|98|1
77
21
91
77|112|1
77
35
91
77|126|1
77
49
91
77|140|1
77
63
91
77|154|2
154
0

Hier ist $m=11$. A
$\frac{a}{m}=\frac{77}{11}=7$ das grösst
meinschaftliche Maas
$a=77$ und $b=91$.

Das Schema 2) führt zu der folgenden Rechnung:

91|77|0
0
77
77
91|154|1
91
63
77
91|140|1
91
49
77
91|126|1
91
35
77
91|112|1
91
21
77
91|98|1
91
7
77
91|84|0
0
84
77
91|161|1
91
70
77
91|147|1
91
56
77
91|133|1
91
42
77
91|119|1
91
28
77
91|105|1
91
14
77
91|91|1
91
0

Hier ist $m'=13$. Also ist $\frac{b}{m'}=\frac{91}{13}=7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a=77$ und $b=91$.

Im ersten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m$$
$$=1+1+1+1+1+2+1+1+1+1+2=13=m';$$

im zweiten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$
$$=0+1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1+1=11=m,$$

ganz den Gleichungen 9) und 8) entsprechend. Der Ausdruck d
Bruchs $\frac{77}{91}$ in den kleinsten Zahlen ist

$$\frac{77:7}{91:7}=\frac{11}{13}=\frac{m}{m'}=\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

wie es nach dem Obigen sein muss.

Bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maass zweier ganzen Zahlen kann die obige Methode, wie leicht in Augen fällt, in vielen Fällen sehr weitläufig werden, und st der gewöhnlichen Methode in jeder Beziehung nach. Im obig Falle erfordert die gewöhnliche Methode nur die folgende äusse leichte und kurze Rechnung:

77 | 91 | 1
77
14 | 77 | 5
70
7 | 14 | 2
14
0

Also ist 7 das grösste gemeinschaftliche Maass von 77 und 91, v vorher. Sind die beiden gegebenen Zahlen 43134 und 269087, braucht man nach der gewöhnlichen Methode bloss die folge Rechnung zu machen:

43134 | 269087 | 6
258804
10283 | 43134 | 4
41132
2002 | 10283 | 5
10010
273 | 2002 | 7
1911
91 | 273 | 3
273
0

Also ist 91 das grösste gemeinschaftliche Maass von 43134 u 269087. In diesem Falle wäre, wenn man $a=43134$, $b=269087$ setz

$$\frac{a}{m}=\frac{43134}{m}=91,\ m=\frac{43134}{91}=474;$$

$$\frac{b}{m'}=\frac{269087}{m'}=91,\ m'=\frac{269087}{91}=2957.$$

Bei Anwendung des Schemas 1) würde man also 474, bei Anwendung des Schemas 2) dagegen sogar 2957 Divisionen zu machen haben, und die praktische Anwendung der obigen Methode würde folglich so gut wie unmöglich sein.

Dagegen bin ich der Meinung, dass in allen den Fällen, wo man durch wirkliche Abmessung das grösste gemeinschaftliche Maass zweier geraden Linien A und B mit möglichster Annäherung bestimmen soll, Poinsots Methode nicht ohne Werth ist, und vor der gewöhnlichen Methode des Euklides entschiedene Vorzüge besitzt. Man braucht nämlich nur eine der beiden gegebenen Linien, etwa die Linie B, auf einer unbestimmt langen geraden Linie von einem beliebigen Anfangspunkte an mehrere Male, und in einer des Folgenden wegen hinreichenden Anzahl, neben einander aufzutragen, worauf man von demselben Anfangspunkte an auf derselben geraden Linie die zweite gerade Linie A so oft neben einander aufträgt, bis ein Punkt dieser zweiten Theilung mit einem Punkte der ersten Theilung entweder völlig genau oder doch so genau, dass der Unterschied nicht mehr sinnlich wahrnehmbar ist, zusammenfällt. Findet dies nun, indem man sich den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der beiden Theilungen mit 0 bezeichnet denkt, zuerst bei dem $m$ten Theilpunkte der ersten Theilung Statt, so theilt man die Linie A in m gleiche Theile ein, und ein solcher Theil ist dann das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden gegebenen geraden Linien A und B entweder völlig genau oder doch mit einer so grossen Annäherung, als die Genauigkeit der angewandten Instrumente und die zu Gebote stehende Schärfe der Sinne zu erreichen gestatten.

Dass ein ganz ähnliches Verfahren auch bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Kreisbogen in Anwendung gebracht werden kann, fällt auf der Stelle in die Augen, wenn man nur überlegt, dass man von jedem beliebigen Punkte in der Kreislinie an die ganze Peripherie ungehindert willkührlich oft durchlaufen kann.

Endlich frägt sich noch, ob man auf die im Obigen entwickelten Principien nicht mit Vortheil für die Kürze und Deutlichkeit die Beweise mancher, die Incommensurabilität betreffender Sätze gründen kann, was, wenn es der Fall wäre, der obigen Methode jedenfalls in dieser Rücksicht zu besonderer Empfehlung gereichen würde. Desfallsige Versuche zu machen, überlasse ich den Lesern, werde denselben aber, wenn sie gelingen sollten, jederzeit gern eine Stelle im Archive einräumen.

XVI.

Ueber eine Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen.

Von
dem Herausgeber.

An die in dem vorhergehenden Aufsatze angestellten Betrachtungen lässt sich, wenn man dieselben noch etwas weiter als dies in diesem Aufsatze geschehen ist verfolgt, die Entwickelung einer Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades anschliessen, welche von mir bei Anfertigung des vorhergehenden Aufsatzes, der auch mehrere mir eigenthümliche Betrachtungen enthält, gefunden wurde, und mir der Beachtung nicht ganz unwerth zu sein scheint, wenn sie auch öfters in ziemlich weitläufige Rechnungen führt.

Betrachten wir nämlich wieder das aus dem vorhergehenden Aufsatze bekannte Schema

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < a;\\
r_1 + b &= aq_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < a;\\
r_2 + b &= aq_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < a;\\
r_3 + b &= aq_4 + r_4, \quad 0 < r_4 < a;\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{m-2} + b &= aq_{m-1} + r_{m-1}, \quad 0 < r_{m-1} < a;\\
r_{m-1} + b &= aq_m;
\end{aligned}$$

so überzeugen wir uns auf der Stelle, dass die nicht verschwindenden Reste

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_{m-1}$$

in allen Fällen sämmtlich unter einander ungleich sein müssen, weil, wenn unter diesen Resten zwei einander gleiche, die wir im Allgemeinen durch r_h und r_{h+i} bezeichnen wollen, vorkämen, nach der Natur des obigen Verfahrens offenbar die nicht verschwindenden Reste

Also ist nach 4):

$$6)\ \frac{a}{m}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots.+q_m},$$

nd nach 5):

$$7)\ \frac{b}{m'}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots.+q'_{m'}}.$$

Nach 3) und 7) ist

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots.+q'_{m'}},$$

nd nach 3) und 6) ist

$$\frac{b}{m'}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots.+q_m}.$$

olglich ist jederzeit

$$8)\ m=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots.+q'_m$$

nd

$$9)\ m'=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots.+q_m.$$

lso ist auch immer

$$10)\ a:\frac{a}{m}=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots.+q'_{m'}$$

nd

$$11)\ b:\frac{b}{m'}=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots.+q_m;$$

der in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückte Werth des uchs $\frac{a}{b}$ ist folglich jederzeit

$$\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots.+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots.+q_m}.$$

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wähwir die beiden ganzen Zahlen 77 und 91, und setzen demzuge $a=77$ und $b=91$.

Bringen wir nun zuvörderst das Schema 1) in Anwendung, so en wir die folgende Rechnung auszuführen. Die derselben im chstehenden gegebene Anordnung hat man sich für alle ähnlichen lle zu merken, da nach unserer Ueberzeugung schon der grossen chheit der Sache wegen sich eine bessere nicht finden lassen le.

77|91|1
77
14
91
77|105|1
77
28
91
77|119|1
77
42
91
77|133|1
77
56
91
77|147|1
77
70
91
77|161|2
154
7
91
77|98|1
77
21
91
77|112|1
77
35
91
77|126|1
77
49
91
77|140|1
77
63
91
77|154|2
154
0

Hier ist $m=11$. Al $\frac{a}{m}=\frac{77}{11}=7$ das grösst meinschaftliche Maass $a=77$ und $b=91$.

Das Schema 2) führt zu der folgenden Rechnung:

91|77|0
0
77
77
91|154|1
91
63
77
91|140|1
91
49
77
91|126|1
91
35
77
91|112|1
91
21
77
91|98|1
91
7
77
91|84|0
0
84
77
91|161|1
91
70
77
91|147|1
91
56
77
91|133|1
91
42
77
91|119|1
91
28
77
91|105|1
91
14
77
91|91|1
91
0

Hier ist $m'=13$. Also ist $\frac{b}{m'}=\frac{91}{13}=7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a=77$ und $b=91$.

Also ist $k=7$ und

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+q_7=0+1+0+1+0+1+1=$$

folglich nach dem Obigen $x=-4$, $y=7$ eine Auflösung u Gleichung; und in der That ist auch

$$12.(-4)+7.7=1.$$

Wenn die Gleichung

$$12x-7y=-1$$

gegeben ist, so bringt man dieselbe auf die Form

$$7y-12x=1,$$

und erhält durch eine der unmittelbar vorhergehenden ganz gl Rechnung die Auflösung $x=4$, $y=7$; und in der That ist

$$12.4-7.7=-1.$$

Hat man endlich die Gleichung

$$12x+7y=-1 \text{ oder } 7y+12x=-1$$

aufzulösen, so findet man nach dem Obigen leicht die beide lösungen $x=-3$, $y=5$ und $x=4$, $y=-7$; und in der ist auch

$$12.(-3)+7.5=-1 \text{ und } 12.4+7.(-7)=-1.$$

Eine Auflösung der Gleichung

$$15x+22y=1$$

ergiebt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r|l|l} 22 & 15 & 0 \\ & 0 & \\ \hline & 15 & \\ & 15 & \\ 22 & 30 & 1 \\ & 22 & \\ \hline & 8 & \\ & 15 & \\ 22 & 23 & 1 \\ & 22 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

Weil nun $k=3$ und

$$q_1+q_2+q_3=0+1+1=2$$

ist, so ist nach dem Obigen $x=3$, $y=-2$ eine Auflösung rer Gleichung; und in der That ist auch

$$15.3+22.(-2)=1.$$

Eine zweite Auflösung ergiebt sich mittelst der folgenden Rechn

15|22|1
15
7
22
15|29|1
15
14
22
15|36|2
30
6
22
15|28|1
15
13
22
15|35|2
30
5
22
15|27|1
15
12
22
15|34|2
30
4
22
15|26|1
15
11
22
15|33|2
30
3
22
15|25|1
15
10
22
15|32|2
30
2
22
15|24|1
15
9
22
15|31|2
30
1

Also ist $k=13$ und

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+\cdots+q_{13}$$
$$=1+1+2+1+2+1+2+1+2+1+2+1+2=19,$$

folglich nach dem Obigen $x=-19$, $y=13$; und in der That ist auch

$$15.(-19)+22.13=1.$$

Dass durch das Obige die vollständige Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit zwei unbekannten Grössen gegeben ist, kann aus den Elementen der Algebra als bekannt vorausgesetzt werden, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Es frägt sich, ob sich das obige völlig allgemeine, und in theoretischer Rücksicht, wie ich glaube, höchst einfache Verfahren, nicht durch zweckmässige Abkürzungen, deren es in vielen Fällen allerdings sehr bedarf, für die Praxis brauchbarer machen lässt. Desfallsige Mittheilungen von Seiten der Leser würden mir, da anderweitige Arbeiten mich zur Zeit hindern, das Obige noch weiter zu verfolgen, sehr angenehm sein, und immer so bald als irgend möglich im Archive abgedruckt werden.

XVII.

Ueber Poinsot's neue Beweise einiger Hauptsätze der Zahlenlehre.

Von

dem Herausgeber.

In der Abhandlung: Reflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. Par M. Poinsot, welche in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Janvier et Février 1845. p. 1.—p. 101. abgedruckt ist, hat der berühmte Verfasser die Beweise mehrerer der wichtigsten Sätze der Zahlenlehre auf so eigenthümliche und an sich so einfache Betrachtungen gegründet, dass wir durch eine Darstellung dieser Beweise, die wir im Folgenden zu geben versuchen wollen, die Leser d

Archivs uns zu verbinden hoffen. Ausser diesen von Poinsot „Démonstrations nouvelles tirées de la considération de l'ordre" genannten Beweisen, auf die wir uns in dem vorliegenden Aufsatze absichtlich beschränken werden, enthält übrigens die genannte Abhandlung noch mehrere andere neue Beweise und eigenthümliche Untersuchungen, deren Mittheilung in dem Archive wir uns für die Folge noch vorbehalten.

§. 1.

Auf dem Umfange eines Kreises denken wir uns in einer bestimmten Ordnung und sämmtlich in gleichen Abständen von einander eine beliebige Anzahl, etwa n, Punkte, welche also den Umfang des Kreises in n gleiche Theile theilen.

Einen dieser Punkte werden wir immer als den Anfangspunkt oder den Nullpunkt annehmen und durch 0, die auf denselben in der zu Grunde gelegten Ordnung aller Punkte folgenden Punkte aber nach der Reihe durch $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2, \ldots$ bezeichnen, so dass nämlich mit den durch

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$$

bezeichneten Punkten respective die durch

$$n, n+1, n+2, n+3, \ldots, 2n-1$$

bezeichneten Punkte, ferner wieder die durch

$$2n, 2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 3n-1$$

bezeichneten Punkte, eben so wieder die durch

$$3n, 3n+1, 3n+2, 3n+3, \ldots, 4n-1$$

bezeichneten Punkte, u. s. w. zusammenfallen.

Wenn nun die in Rede stehenden Punkte von dem 0ten an nach der zu Grunde gelegten Ordnung aller Punkte so durchlaufen werden, dass man von dem 0ten zum $i$ten, vom $i$ten zum $2i$ten, vom $2i$ten zum $3i$ten, vom $3i$ten zum $4i$ten u. s. w. übergeht, so wollen wir im Folgenden der Kürze wegen sagen, dass man die Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen habe, oder wir wollen dies ein Durchlaufen der Punkte mit dem Intervalle i nennen.

Alles dieses vorausgesetzt, lässt sich nun zuvörderst der nachstehende Lehrsatz, welcher als die Hauptgrundlage alles Folgenden zu betrachten ist, beweisen.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn die n Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen werden, so trifft man immer endlich einmal wieder auf den Nullpunkt; bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist man auf keinen Punkt

mehr als *ein* Mal getroffen; wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, hat man, wenn wir das grösste gemeinschaftliche Maass von n und i durch μ bezeichnen, die ganze Peripherie $\frac{i}{\mu}$ Mal durchlaufen; bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist mit Einrechnung des Nullpunktes $\frac{n}{\mu}$ die Anzahl der überhaupt getroffenen verschiedenen Punkte.

Beweis. Bezeichnen wir die ganze Peripherie mit Π, so ist $\frac{\Pi}{n}$ jeder der n gleichen Theile, in welche die Peripherie durch die n Punkte getheilt wird. Durchläuft man also die Punkte mit dem Intervalle i, so geht man dabei jedesmal über den Theil $i\frac{\Pi}{n}$ der Peripherie hinweg, und weil nun

$$ni\frac{\Pi}{n} = in\frac{\Pi}{n} = i\Pi$$

ist, so muss man offenbar, spätestens nachdem mit Einrechnung des Nullpunktes als Anfangspunkt der Bewegung n Punkte getroffen worden sind, jederzeit wieder auf den Nullpunkt zurückkehren, womit der erste Theil unsers Satzes bewiesen ist.

Entsprechen die Zahlen ki und $k'i$, wo k' grösser als k sein soll, einem und demselben von dem Nullpunkte verschiedenen Punkte, so ist offenbar

$$(k'-k)i\frac{\Pi}{n}$$

ein Vielfaches $m\Pi$ von Π, also

$$(k'-k)i\frac{\Pi}{n} = m\Pi,$$

und folglich

$$(k'-k)i = mn,$$

d. i. $(k'-k)i$ ein Vielfaches von n. Daher trifft der Punkt, welchem die Zahl $(k'-k)i$ entspricht, mit dem Nullpunkte zusammen, und es muss also, weil $(k'-k)i$ kleiner als $k'i$ ist, bevor man auf den Punkt, welchem die Zahl $k'i$ entspricht, trifft, der Nullpunkt mindestens schon ein zweites Mal getroffen worden sein. Hieraus ergiebt sich aber unmittelbar der zweite Theil unseres Satzes, dass nämlich, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, kein Punkt zwei Mal getroffen werden kann.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, dass man, wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, die ganze Peripherie q Mal durchlaufen habe, so ist offenbar, da die ganze Peripherie in n gleiche Theile getheilt ist und jedes Intervall i solcher Theile enthält, qn das niedrigste Vielfache von n, welches von i gemessen wird. Also ist $\frac{i}{q}$ der grösste aliquote Theil von i, von

$$r_k,\ r_{k+1},\ r_{k+2},\ r_{k+3},\ldots r_{k+i-1}$$

nendliche wiederkehren müssten, man also niemals auf einen hwindenden Rest kommen könnte, welches doch bekanntlich zeit endlich einmal der Fall sein muss.
ind nun a und b relative Primzahlen, so ist deren grösstes nschaftliches Maass $\frac{a}{m}$ (m. s. den vorhergehenden Aufsatz) die it, und folglich $m=a$. Also können offenbar die $a-1$ nicht hwindenden, sämmtlich unter einander ungleichen Reste

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

e alle kleiner als a sind, nur die in einer gewissen Ordnung mmenen ganzen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ a-1$$

und es muss also unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

en Fällen die Einheit vorkommen.
Bezeichnen wir jetzt denjenigen unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

ner der Einheit gleich ist, durch r_k, und setzen also $r_k=1$, ben wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1,\\
r_1 + b &= aq_2 + r_2,\\
r_2 + b &= aq_3 + r_3,\\
r_3 + b &= aq_4 + r_4,\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{k-2} + b &= aq_{k-1} + r_{k-1},\\
r_{k-1} + b &= aq_k + 1;
\end{aligned}$$

h deren Addition sich die Gleichung

$$bk = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) + 1$$

$$bk - a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) = 1$$

ebt.
Haben wir nun die unbestimmte Gleichung des ersten Grades chen zwei unbekannten Grössen

$$bx - ay = 1,$$

a und b relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern nach t Vorhergehenden offenbar die Werthe

wenn man die ganze Peripherie nur i' Mal durchlaufen hätte, der Nullpunkt wieder getroffen werden würde, nachdem man vorher über nur p, d. h. weniger als n Punkte hinweggegangen wäre, was gegen die Voraussetzung streitet. Also ist $\frac{i}{i'}$ der grösste aliquote Theil von i, von welchem n gemessen wird, was sich auf dieselbe Weise wie in dem ähnlichen Falle in dem dritten Theile des Beweises des vorhergehenden Lehrsatzes zeigen lässt. Daher ist $\frac{i}{i'}=1$ das grösste gemeinschaftliche Maas von n und i, und n und i sind folglich relative Primzahlen, wie behauptet wurde.

Dritter Zusatz. Wenn daher bei jedem Intervalle, mit welchem man die n Punkte auch durchlaufen mag, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, alle n Punkte getroffen werden, so ist n jederzeit eine Primzahl.

Vierter Zusatz. Die Anzahl der verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche man erhält, wenn man dieselben nach und nach mit allen Zahlen, die zu n relative Primzahlen sind, als Intervallen durchläuft, ist jederzeit der Anzahl der Zahlen gleich, welche zu n relative Primzahlen und kleiner als n sind.

Für jede zwei Intervalle, welche zu n relative Primzahlen und kleiner als n sind, müssen die Ordnungen, in denen die n Punkte durchlaufen werden, nothwendig von einander verschieden sein, wie auf der Stelle in die Augen fällt, wenn man nur überlegt, dass unter dieser Voraussetzung die unmittelbar auf den Nullpunkt folgenden Punkte in den beiden Ordnungen offenbar jederzeit von einander verschieden sein müssen. Wenn aber i zu n relative Primzahl und grösser als n ist, so ist, wenn

$$i=kn+i'$$

gesetzt wird, wo $i'<n$ sein soll, offenbar auch i' zu n relative Primzahl; und da ein Durchlaufen der n Punkte mit dem Intervalle i augenscheinlich ganz zu der nämlichen Ordnung dieser Punkte führen muss, wie ein Durchlaufen derselben mit dem Intervalle i', so ist klar, dass jedes Durchlaufen mit einem Intervalle, welches zu n relative Primzahl und grösser als n ist, zu einer Ordnung der n Punkte führen muss, welche schon früher bei einem Durchlaufen dieser n Punkte mit einem Intervalle, das zu n relative Primzahl und kleiner als n ist, herbeigeführt wurde. Verbindet man dies mit dem Obigen, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn n mit a und b relative Primzahl ist, so sind auch n und das Product ab relative Primzahlen.

Also ist nach 4):

$$6)\quad \frac{a}{m}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

und nach 5):

$$7)\quad \frac{b}{m'}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}.$$

Nach 3) und 7) ist

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}},$$

und nach 3) und 6) ist

$$\frac{b}{m'}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Folglich ist jederzeit

$$8)\quad m=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$9)\quad m'=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m.$$

Also ist auch immer

$$10)\quad a:\frac{a}{m}=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$11)\quad b:\frac{b}{m'}=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m;$$

und der in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückte Werth des Bruches $\frac{a}{b}$ ist folglich jederzeit

$$\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir die beiden ganzen Zahlen 77 und 91, und setzen demzufolge $a=77$ und $b=91$.

Bringen wir nun zuvörderst das Schema 1) in Anwendung, so haben wir die folgende Rechnung auszuführen. Die derselben im nachstehenden gegebene Anordnung hat man sich für alle ähnlichen Fälle zu merken, da nach unserer Ueberzeugung schon der grossen Einfachheit der Sache wegen sich eine bessere nicht finden lassen dürfte.

77|91|1
77
14
91
77|105|1
77
28
91
77|119|1
77
42
91
77|133|1
77
56
91
77|147|1
77
70
91
77|161|2
154
7
91
77|98|1
77
21
91
77|112|1
77
35
91
77|126|1
77
49
91
77|140|1
77
63
91
77|154|2
154
0

Hier ist $m=11$. $\frac{a}{m}=\frac{77}{11}=7$ das grös
meinschaftliche Maa
$a=77$ und $b=91$.

Das Schema 2) führt zu der folgenden Rechnung:

91|77|0
0
77
77
91|154|1
91
63
77
91|140|1
91
49
77
91|126|1
91
35
77
91|112|1
91
21
77
91|98|1
91
7
77
91|84|0
0
84
77
91|161|1
91
70
77
91|147|1
91
56
77
91|133|1
91
42
77
91|119|1
91
28
77
91|105|1
91
14
77
91|91|1
91
0

Hier ist $m'=13$. Also ist $\frac{b}{m'}=\frac{91}{13}=7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a=77$ und $b=91$.

Punkte durchlaufe man mit dem Intervalle x, so trifft man, weil nach der Voraussetzung n und x relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. auf alle n Punkte, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Nun nehme man die n Punkte in der Ordnung, in welcher sie jetzt getroffen worden sind, und durchlaufe sie von Neuem mit dem Intervalle x, so trifft man, weil nach der Voraussetzung n und x relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. wieder auf alle n Punkte, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Setzt man aber dieses Verfahren auf dieselbe Art weiter fort, so erhält man dadurch offenbar ganz dieselben Ordnungen der n Punkte, welche man erhält, wenn man dieselben nach und nach mit den Intervallen x, x^2, x^3, x^4,.... durchläuft. Da nun nach der Voraussetzung x, und nach §. 5. Zweiter Zusatz. also auch die sämmtlichen Potenzen von x mit n relative Primzahlen sind, so kann nach §. 3. Vierter Zusatz. die Anzahl der verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche man auf die obige Weise erhält, nicht grösser als p sein, und es muss folglich immer eine Ordnung der n Punkte wiederkehren. Die erste wiederkehrende Ordnung der n Punkte muss aber nothwendig die erste ursprüngliche Ordnung derselben sein, weil offenbar ganz aus denselben Gründen, aus welchen eine spätere von der ersten ursprünglichen Ordnung verschiedene Ordnung wiedergekehrt sein sollte, schon früher die erste ursprüngliche Ordnung selbst wiedergekehrt sein müsste.

Bezeichnen wir nun die Anzahl der auf die obige Weise erhaltenen verschiedenen Ordnungen der n Punkte durch p', so ist $p' \leqq p$. Wenn aber $p' < p$ ist, so lässt sich auf folgende Art leicht übersehen, dass p jederzeit ein Vielfaches von p' sein muss. Denken wir uns nämlich eine beliebige unter den auf die obige Weise erhaltenen sämmtlich unter einander verschiedenen p' Ordnungen der n Punkte nicht vorkommende Ordnung, so führt diese Ordnung, wenn man auf dieselbe das nämliche Verfahren wie vorher anwendet, natürlich auch auf p' sämmtlich von einander verschiedene Ordnungen, welche aber nothwendig auch sämmtlich von den ersten unter einander verschiedenen p' Ordnungen verschieden sein müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, wie leicht erhellen wird, die ersten Ordnungen in den beiden Systemen nothwendig identisch sein müssten, was gegen die Voraussetzung streitet. Gäbe es nun noch eine weder in dem ersten, noch in dem zweiten Systeme vorkommende Ordnung der n Punkte, so würde diese, wenn man sie dem obigen Verfahren unterwirft, auf dieselbe Weise wie vorher wieder zu p' weder in dem ersten, noch in dem zweiten Systeme vorkommenden, unter einander verschiedenen Ordnungen führen. Setzt man diese Betrachtungen weiter fort und überlegt, dass nach §. 3. Vierter Zusatz. p die Anzahl aller überhaupt möglichen Ordnungen der n Punkte ist, so ist ersichtlich, dass p ein Vielfaches von p' sein muss, und daher $p = mp'$ gesetzt werden kann.

Weil nun nach dem Vorhergehenden, wenn man die n Punkte mit dem Intervalle $x^{p'}$ durchläuft, deren ursprüngliche Ordnung wieder herbeigeführt wird, so muss die Potenz $x^{p'}$ offenbar nothwendig einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich sein. Durch successive Multiplication oder auch mittelst

$$\frac{a}{m}=\frac{43134}{m}=91,\ m=\frac{43134}{91}=474;$$

$$\frac{b}{m'}=\frac{269087}{m'}=91,\ m'=\frac{269087}{91}=2957.$$

Bei Anwendung des Schemas 1) würde man also 474, bei Anwendung des Schemas 2) dagegen sogar 2957 Divisionen zu machen haben, und die praktische Anwendung der obigen Methode würde folglich so gut wie unmöglich sein.

Dagegen bin ich der Meinung, dass in allen den Fällen, wo man durch wirkliche Abmessung das grösste gemeinschaftliche Maass zweier geraden Linien A und B mit möglichster Annäherung bestimmen soll, Poinsots Methode nicht ohne Werth ist, und vor der gewöhnlichen Methode des Euklides entschiedene Vorzüge besitzt. Man braucht nämlich nur eine der beiden gegebenen Linien, etwa die Linie B, auf einer unbestimmt langen geraden Linie von einem beliebigen Anfangspunkte an mehrere Male, und in einer des Folgenden wegen hinreichenden Anzahl, neben einander aufzutragen, worauf man von demselben Anfangspunkte an auf derselben geraden Linie die zweite gerade Linie A so oft neben einander aufträgt, bis ein Punkt dieser zweiten Theilung mit einem Punkte der ersten Theilung entweder völlig genau oder doch so genau, dass der Unterschied nicht mehr sinnlich wahrnehmbar ist, zusammenfällt. Findet dies nun, indem man sich den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der beiden Theilungen mit 0 bezeichnet denkt, zuerst bei dem $m$ten Theilpunkte der ersten Theilung Statt, so theilt man die Linie A in m gleiche Theile ein, und ein solcher Theil ist dann das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden gegebenen geraden Linien A und B entweder völlig genau oder doch mit einer so grossen Annäherung, als die Genauigkeit der angewandten Instrumente und die zu Gebote stehende Schärfe der Sinne zu erreichen gestatten.

Dass ein ganz ähnliches Verfahren auch bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Kreisbogen in Anwendung gebracht werden kann, fällt auf der Stelle in die Augen, wenn man nur überlegt, dass man von jedem beliebigen Punkte in der Kreislinie an die ganze Peripherie ungehindert willkührlich oft durchlaufen kann.

Endlich frägt sich noch, ob man auf die im Obigen entwickelten Principien nicht mit Vortheil für die Kürze und Deutlichkeit die Beweise mancher, die Incommensurabilität betreffender Sätze gründen kann, was, wenn es der Fall wäre, der obigen Methode jedenfalls in dieser Rücksicht zu besonderer Empfehlung gereichen würde. Desfallsige Versuche zu machen, überlasse ich den Lesern, werde denselben aber, wenn sie gelingen sollten, jederzeit gern eine Stelle im Archive einräumen.

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag,\ldots\ldots$$

welche nach §. 4. sämmtlich zu n relative Primzahlen sind, durchläuft. Wenn man also die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag,\ldots\ldots$$

durchläuft, so erhält man nach dem Vorhergehenden p sämmtlich von einander verschiedene Ordnungen der n Punkte; und da nun nach §. 3. Vierter Zusatz. überhaupt nur p verschiedene Ordnungen der n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung möglich sind, so muss unter den p verschiedenen Ordnungen, welche man erhält, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag,\ldots\ldots$$

durchläuft, jederzeit nothwendig die erste ursprüngliche Ordnung der n Punkte selbst vorkommen. Also muss unter den obigen Producten immer eins vorkommen, welches einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist. Wäre dieses Product aber das erste Glied der obigen Reihe, nämlich aa, und wäre also

$$aa = kn + 1,$$

so wäre

$$a(n-a) = an - aa = (a-k)n - 1,$$

und folglich das Product $a(n-a)$ einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich. $n-a$ ist offenbar kleiner als n, und kann nicht gleich a sein, weil, wenn $n-a=a$ wäre, $n=2a$ wäre, und daher n nur dann mit a relative Primzahl sein könnte, wenn $a=1$ wäre; dann wäre aber $n=2$, welchen Fall wir, weil in demselben die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes auf der Stelle erhellet, auszuschliessen berechtigt sind. Ferner fällt leicht in die Augen, dass $n-a$ jederzeit mit n relative Primzahl ist, weil, wenn $n-a=\lambda\mu$, $n=\lambda'\mu$, wo μ grösser als die Einheit sein soll, wäre, offenbar $a=(\lambda'-\lambda)\mu$, und daher a mit n nicht relative Primzahl sein würde. Hieraus sieht man, dass $n-a$ jederzeit in der Reihe der Zahlen $b, c, d, e, f, g,\ldots$ vorkommen muss, und es erhellet nun, dass sich die Zahlen $a, b, c, d, e, f, g,\ldots$ immer so zu Producten mit zwei ungleichen Factoren unter einander verbinden lassen, dass jedes dieser Producte entweder einem um die Einheit vermehrten oder einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich ist. Leicht lässt sich endlich auch zeigen, dass unter diesen Producten nicht zwei von der Form ab und ac, wo a, b, c unter einander ungleich sein sollen, vorkommen können. Sollte nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$ab = qn \pm 1,\quad ac = q'n \pm 1$$

sein können, so wäre

$$a(b-c) = (q-q')n,$$

und folglich $a(b-c)$, also nach §. 5. Dritter Zusatz., weil nach der

$$r_k,\ r_{k+1},\ r_{k+2},\ r_{k+3},\ldots r_{k+i-1}$$

Unendliche wiederkehren müssten, man also niemals auf einen chwindenden Rest kommen könnte, welches doch bekanntlich rzeit endlich einmal der Fall sein muss.
Sind nun a und b relative Primzahlen, so ist deren grösstes einschaftliches Maass $\frac{a}{m}$ (m. s. den vorhergehenden Aufsatz) die eit, und folglich $m=a$. Also können offenbar die $a-1$ nicht chwindenden, sämmtlich unter einander ungleichen Reste

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

he alle kleiner als a sind, nur die in einer gewissen Ordnung mmenen ganzen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ a-1$$

und es muss also unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

len Fällen die Einheit vorkommen.
Bezeichnen wir jetzt denjenigen unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{a-1}$$

her der Einheit gleich ist, durch r_k, und setzen also $r_k=1$, ben wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
b &= aq_1+r_1,\\
r_1+b &= aq_2+r_2,\\
r_2+b &= aq_3+r_3,\\
r_3+b &= aq_4+r_4,\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{k-2}+b &= aq_{k-1}+r_{k-1},\\
r_{k-1}+b &= aq_k+1;
\end{aligned}$$

h deren Addition sich die Gleichung

$$bk=a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)+1$$

$$bk-a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_k)=1$$

ebt.
Haben wir nun die unbestimmte Gleichung des ersten Grades chen zwei unbekannten Grössen

$$bx-ay=1,$$

a und b relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern nach n Vorhergehenden offenbar die Werthe

und es muss also die in dem Producte $(x-1)(x+1)$ aufgehende Primzahl n entweder in $x-1$ oder in $x+1$ aufgehen. Geht aber n in $x-1$ auf, und ist also $x-1=q'n$, so ist

$$x=q'n+1.$$

Wäre nun $q'>0$, so wäre $x>n$, was gegen die Voraussetzung ist, und es ist folglich $q'=0$, also $x=1$. Geht ferner n in $x+1$ auf, und ist also $x+1=q''n$, so ist

$$x=n-1+(q''-1)n.$$

Wäre nun $q''>1$, so wäre $x>n-1$, was gegen die Voraussetzung ist, und es muss folglich, weil in diesem Falle offenbar q'' nicht verschwinden kann, $q''=1$, also $x=n-1$ sein. Folglich ist entweder $x=1$ oder $x=n-1$. Für $x=1$ ist

$$x(n-x)=1.(n-1),$$

und für $x=n-1$ ist auch

$$x(n-x)=1.(n-1),$$

so dass also immer

$$x(n-x)=1.(n-1)$$

ist. Nimmt man hierzu, dass offenbar, wenn $n-k$ irgend ein Glied der Reihe $2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$ bezeichnet, niemals

$$1.(n-k)=q'''n+1$$

sein kann, und dass sich also 1 mit keiner der Zahlen $2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$ zu einem Producte verbinden lässt, welches einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist, so wird leicht erhellen, dass unter den Producten mit zwei Factoren, in welche sich auf die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Art das Product $1.2.3.4\ldots.(n-1)$ zerlegen lässt, immer das Product $1.(n-1)=1.n-1$ vorkommen muss, dass aber jedes andere dieser Producte einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist, woraus sich ferner mittelst successiver Multiplication sogleich ergiebt, dass das Product $1.2.3.4.5\ldots.(n-1)$ immer einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich, oder dass jederzeit die Grösse

$$1.2.3.4.5\ldots.(n-1)+1$$

durch n theilbar ist, welches uns zu dem folgenden Satze führt:

Wenn n eine Primzahl ist, so ist die Grösse

$$1.2.3.4.5\ldots.(n-1)+1$$

jederzeit durch n theilbar.

Dieser wichtige und merkwürdige Satz wird in der Zahlenlehre bekanntlich Wilsons Satz genannt.

ein niedrigeres Vielfaches μB von B als mB, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, was gegen die Voraussetzung streitet. Daher kann es kein grösseres gemeinschaftliches Maass der beiden Grössen A und B als $\frac{A}{m}$ geben, und $\frac{A}{m}$ ist folglich das grösste gemeinschaftliche Maass von A und B, welches der erste Theil unserer Behauptung war.

Wenn die Grössen A und B commensurabel sind, d. h. wenn dieselben überhaupt ein gemeinschaftliches Maass M haben, so dass, wenn μ und ν ganze Zahlen bezeichnen, $A=\mu M$ und $B=\nu M$ ist, so ist $\mu B=\mu\nu M=\nu.\mu M=\nu A$, und es giebt also unter der gemachten Voraussetzung immer ein Vielfaches μB von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen νA von A gleich ist; man muss folglich in diesem Falle bei Anwendung des obigen Verfahrens offenbar immer endlich einmal auf ein Vielfaches von B kommen, welches von A genau gemessen wird, oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist. Wenn man also bei Anwendung des obigen Verfahren niemals auf ein Vielfaches von B kommt, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, so sind die beiden Grössen A und B incommensurabel, welches der zweite Theil unserer Behauptung war.

Bei Anwendung des obigen Verfahrens auf zwei ungleiche ganze Zahlen a und b dividirt man mit der einen, etwa mit a, in die andere b hinein. Bleibt bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben b und dividirt in die Summe wieder mit a hinein. Bleibt auch bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben wieder b und dividirt in die Summe mit a hinein. Diese Operation setzt man so lange fort, bis man auf einen verschwindenden Rest kommt, was nach dem Vorhergehenden im vorliegenden Falle offenbar immer endlich einmal Statt finden muss, weil zwei ganze Zahlen jederzeit commensurabel sind. Dann dividirt man mit der Anzahl der ausgeführten Divisionen in a hinein, und der auf diese Weise erhaltene Quotient ist nach dem oben Bewiesenen das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden ganzen Zahlen a und b.

Folgendes Schema stellt diese Operation im Allgemeinen dar:

$$1)\quad \begin{cases} b=aq_1+r_1,\ 0<r_1<a; \\ r_1+b=aq_2+r_2,\ 0<r_2<a; \\ r_2+b=aq_3+r_3,\ 0<r_3<a; \\ r_3+b=aq_4+r_4,\ 0<r_4<a; \\ \text{u. s. w.} \\ r_{m-2}+b=aq_{m-1}+r_{m-1},\ 0<r_{m-1}<a; \\ r_{m-1}+b=aq_m. \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m ist, so ist $\frac{a}{m}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und b.

Verwechselt man, was natürlich verstattet ist, a und b mit einander, so erhält man folgendes Schema:

$$2)\quad \begin{cases} a=bq_1'+r_1', & 0<r_1'<b; \\ r_1'+a=bq_2'+r_2', & 0<r_2'<b; \\ r_2'+a=bq_3'+r_3', & 0<r_3'<b; \\ r_3'+a=bq_4'+r_4', & 0<r_4'<b; \\ \text{u. s. w.} & \\ r'_{m'-2}+a=bq'_{m'-1}+r'_{m'-1}, & 0<r'_{m'-1}<b; \\ r'_{m'-1}+a=bq'_{m'}. & \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m' ist, $\frac{b}{m'}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und

Weil also sowohl $\frac{a}{m}$, als auch $\frac{b}{m'}$, das grösste gemeins liche Maass von a und b ist, so ist natürlich

$$3)\quad \frac{a}{m}=\frac{b}{m'},$$

also $m'a=mb$; und weil nun

$$a=m\frac{a}{m},\quad b=m'\frac{b}{m'}$$

oder

$$a:\frac{a}{m}=m,\quad b:\frac{b}{m'}=m'$$

ist, so müssen m und m' nothwendig relative Primzahlen weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\frac{a}{m}=\frac{b}{m'}$ offenbar nich grösste gemeinschaftliche Maass von a und b sein könnte. V der Gleichung $m'a=mb$ geht aber m in $m'a$ und m' in mb also muss nach einem sehr bekannten Satze, weil m und m' tive Primzahlen sind, m in a und m' in b aufgehen, ode grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{a}{m}=\frac{b}{m'}$ der beiden ganzen Z a und b ist jederzeit eine ganze Zahl.

Durch Addition der Gleichungen 1) erhält man, wenn ma hebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$4)\quad mb=a(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m);$$

und eben so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 2), man wieder aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$5)\quad m'a=b(q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}).$$

assen jenseits des Oceans vorhanden wären. Unbemerkt schmolzen die geographischen Vorstellungen von dem Vorhandensein anderer bewohnbarer Zonen mit der religiösen Idee einer anderen Welt zusammen und zogen sich in den ätherischen Duft dichterischer Phantasieen zurück. Der Garten der Hesperiden, das Elysium, die glückseligen Inseln, das Paradies der Christen sind geographische Phantasiegebilde, welche aus religiösen Ideen entstanden und hier bestimmter, dort unbestimmter an eine gewisse Oertlichkeit gebunden waren.

Die grossen geographischen Entdeckungen, namentlich die Erdumsegelungen, haben diese Phantasiegebilde zerstört; die Dichtung wurde von der Anschauung verdrängt, die mythische Kosmographie verwandelte sich in physische Geographie. Die letzte Folge hiervon war die Flucht der guten Geister von der Erde. Die seligen Gefilde, die schon anfangs über den Ocean zurückgewichen waren, erhoben sich von der Erde zu den Wolkensitzen und flüchteten unter die Sterne.

Aber auch von da sind sie vertrieben worden. Die Gesetze Kepplers, des Ersten, der die Natur richtig zu befragen versteht und dem sie antwortet, zerbrechen die krystallenen Sphären der Alten und rauben den Planeten ihre Führer; Newton zeigt, dass die Kraft, welche in den Tiefen der himmlischen Räume waltet und die Planeten in ihren Bahnen führt, keine andere ist, als die Schwere an unserer Erde. Die Geheimnisse schwinden aus der Sternenwelt, die fortschreitende Theorie greift sogar in einigen Fällen der Beobachtung vor und Laplace krönt das ruhmwürdig begonnene Werk mit der Mechanik des Himmels. So zerstörte die Astronomie sogar im Bau des Himmels den architektonischen Zauber und das Land der Verheissung schwand aus den Räumen des Aethers. Wohin auch das Fernrohr den Blick des Menschen trug, überall folgte ihm die Nothwendigkeit des Calcüls, Raum verweigernd einer ätherischen Welt. Die Mechanik des Himmels hat des Aristoteles Lichtwelt der Gestirne, den Himmel unserer Väter zertrümmert und uns dafür ein Weltgebäude massenhafter schwerer Körper geschenkt. Die schützenden Engel des Menschengeschlechts, alle Genien und gütigen Feen verliessen dessen Gesellschaft und wanderten in das Land der Sage oder der Dichtung.

Diess ist eine ungefähre Skizze der vier ersten Kapitel des Buches, bei der sich Ref. zum Theil der Worte des Verf. bedient hat. Im fünften Kapitel (II. 4.) giebt er uns eine historische Darstellung der verschiedenen Stufen religiöser Ausbildung im Völkerleben und ihres Verhältnisses zur Philosophie und Naturwissenschaft. Eine sehr schätzenswerthe Zugabe bildet der Anhang, welcher drei bemerkenswerthe Aufsätze enthält: I. Erläuterungen über die Epicykelntheorie und das Verhältniss der drei Weltsysteme; II. Kepplers Mysterium cosmographicum und III. Kepplers Induktion zur Entdeckung der wahren Gestalt der Planetenbahnen. In diesem Anhange zeigt sich der Verf. als guter Kenner der Mathematik, was um so bemerkenswerther ist, als sich die Philosophie ungefähr seit dem Anfange dieses Jahrhunderts der Mathematik zu schämen scheint und namentlich die sogenannten Philosophen mancher Schulen auf unsere Wissenschaft mit einer Geringschätzung herabblicken, wie sie nur aus grober Igno-

ranz darin entstehen kann. Jener Anhang hat das Verdienst, eine zwar gedrängte, aber vollständige Uebersicht über die Arbeiten Kepplers zu geben, wovon man selbst in den grösseren astronomischen Lehrbüchern kaum mehr als eine Notiz findet. Hierbei hat der Vf. Keppler mit Recht gegen Laplace und Delambre in Schutz genommen, die ihn wie einen Schüler Newton's beurtheilen und seine Spekulationen über die Kosmophysik und die Weltharmonie für blosse Träumereien halten, welche müssig neben seinen astronomischen Forschungen einhergehen und dieselben öfter beeinträchtigt haben; in der That sind sie aber die Quelle seiner grossen Entdeckungen, indem gerade die mystische Naturansicht die Erfindungskraft Kepplers leitete. Den eigenthümlichen Gedankengang desselben theilt uns der Verf. in der heutigen Sprache der Mathematik mit.

Diese Anzeige möge hinreichen, um die Mathematiker und Physiker auf ein Werk aufmerksam zu machen, das sie des bescheidenen Titels wegen leicht übersehen könnten. Der zweite Band, welcher u. A. die historische Entwickelung der Entscheidung jenes Streites zwischen dem Naturalismus der Physik und den religiösen Ideen enthalten wird, soll, wie es heisst, dem ersten rasch nachfolgen. Möge derselbe ein seinem Inhalte nach eben so gediegenes und seiner Form nach eben so ansprechendes Ganzes bilden, wie der erste.

Jena. Schlömilch.

XXI.

Auflösung des Keplerschen Problems nach Newton, verglichen mit der jetzt noch gebräuchlichen numerischen Auflösung.

Von dem

Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,

astronomischen Rechner an der K. Sternwarte zu Berlin.

Jeder, welcher sich auch nur mit den ersten Theilen der theoretischen Astronomie beschäftigt hat, kennt das Problem, wovon hier die Rede sein soll. Die Gleichungen, welche zwischen den einzelnen Grössen stattfinden, werden in der neuern Zeit gewöhn

lich auf dem kürzern analytischen Wege hergeleitet und auf demselben gelangt man zu den verschiedenen indirecten Auflösungen, da eine directe, der Natur der Sache nach, nicht möglich ist. Wenn so auch die analytische Darstellung vollkommen genügt, um die in der theorischen Astronomie vorkommenden Aufgaben zu lösen, so glaube ich doch, dass es für manchen Leser, welcher Newtons Principia mathematica philosophiae naturalis nicht kennt, interessant und vielleicht auch lehrreich sein wird, die synthetische Weise kennen zu lernen, auf welche Newton zu denselben Resultaten gelangt ist, die noch heute gelten. Ich werde daher hier einige Sätze aus Abschnitt VI. des ersten Buches jenes Werkes mittheilen und die Resultate mit den Ausdrücken von Gauss in der Theoria motus corporum coelestium vergleichen.

Zuerst zeigt Newton in einem Lehnsatze durch Raisonnement, dass keine elliptische Figur existire, deren, durch beliebige gerade Linien abgeschnittener Flächenraum allgemein mittelst Gleichungen dargestellt werden könne, welche in der Zahl ihrer Glieder und Dimensionen begrenzt sind. Er schneidet daher den, der Zeit proportionalen Theil der Fläche einer Ellipse mittelst einer geometrisch irrationalen Curve ab, und zwar folgendermassen.

§. 1.

Aufgabe. Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse, man soll seinen, einer gegebenen Zeit entsprechenden Ort in derselben finden.

Auflösung. In der Ellipse APB (Taf. II. Fig. 3.) sei A der Hauptscheitelpunkt, S der Brennpunkt, O das Centrum und P der zu findende Ort des Körpers. Man verlängere OA über A hinaus bis G, so dass

$$OG : OA = OA : OS$$

wird, und errichte hierauf GH perpendikulär auf AG. Hierauf beschreibe man aus O als Mittelpunkt und mit dem Radius OG den Kreis EFG, lasse den letztern auf der geraden Linie GH als Basis fortrollen, so dass der Punkt A die gestreckte Cycloide ALJ beschreibt. Ist diess geschehen, so nehme man die Linie GK in dem Verhältniss zur Peripherie GFE des Kreises an, in welchem die Zeit, worin der Körper den elliptischen Bogen AP zurücklegt, zur ganzen Umlaufszeit in der Ellipse steht. Errichtet man nun auf GH das Perpendikel KL, welches die Cycloide in L schneidet, und zieht

LP parallel GK;

so ist der Durchschnittspunkt P der erstern mit der Ellipse der verlangte Punkt.

Man beschreibe nämlich aus O als Mittelpunkt mit dem Radius OA den Kreis AQB, so dass dieser und LP sich in Q schneiden, und ziehe die Linien SQ und OQ, endlich fälle man von S auf die Richtung der letzteren das Perpendikel SR. Der elliptische Sector ASP ist alsdann proportional dem Kreissector ASQ. Ver-

Im ersten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m$$
$$=1+1+1+1+1+2+1+1+1+1+2=13=m';$$

im zweiten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$
$$=0+1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1+1=11=m,$$

ganz den Gleichungen 9) und 8) entsprechend. Der Ausdruck d
Bruchs $\frac{77}{91}$ in den kleinsten Zahlen ist

$$\frac{77:7}{91:7}=\frac{11}{13}=\frac{m}{m'}=\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

wie es nach dem Obigen sein muss.

Bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maass zweier ganzen Zahlen kann die obige Methode, wie leicht in Augen fällt, in vielen Fällen sehr weitläufig werden, und ste der gewöhnlichen Methode in jeder Beziehung nach. Im obig Falle erfordert die gewöhnliche Methode nur die folgende äusse leichte und kurze Rechnung:

77 | 91 | 1
77
14 | 77 | 5
70
7 | 14 | 2
14
0

Also ist 7 das grösste gemeinschaftliche Maass von 77 und 91, w vorher. Sind die beiden gegebenen Zahlen 43134 und 269087, braucht man nach der gewöhnlichen Methode bloss die folgen Rechnung zu machen:

43134 | 269087 | 6
258804
10283 | 43134 | 4
41132
2002 | 10283 | 5
10010
273 | 2002 | 7
1911
91 | 273 | 3
273
0

Also ist 91 das grösste gemeinschaftliche Maass von 43134 u 269087. In diesem Falle wäre, wenn man $a=43134$, $b=269087$ set

Dieser Sector ist aber der Zeit proportional, welche der Körper gebraucht hat, um vom Perihel A bis zum Punkt P zu gelangen; folglich ist auch diese Zeit proportional

$$E - e \sin E.$$

Dass man aus der vorliegenden Figur auch alle die Relationen herleiten könne, welche in der Theoria motus. pag. 8. zusammengestellt sind, ersieht man leicht folgendermassen. Fügt man zu den bereits eingeführten Bezeichnungen noch hinzu:

$$e = \sin\varphi,\ a^2 . e^2 = a^2 - b^2 \text{ oder } b^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$\text{d. h. } b = a\cos\varphi,$$

$$SP = r \text{ und W. } ASP = v;$$

so wird

$$SW = -r\cos v = SO + OW = ae - a\cos E,$$

also

$$r\cos v = a(\cos E - e), \text{ wie Nr. IX. a. a. O.}$$

Ferner

$$PW = r\sin v = \frac{b}{a}QW = a\cos\varphi\sin E, \text{ wie Nr. VIII.}$$

$$SP^2 = r^2 = SW^2 + PW^2$$

$$= a^2(\cos E^2 + \sin\varphi^2 - 2e\cos E + \cos\varphi^2\sin E^2)$$

$$\text{oder } r = a(1 - e\cos E), \text{ wie Nr. III. u. s. w.}$$

Wegen der Uebereinstimmung der vorstehenden Gleichungen mit denen in der Theoria motus, muss also auch die dortige Gleichung zwischen der mittlern und excentrischen Anomalie

$$M = E - e\sin E$$

hier stattfinden. Da ferner nach §. 1.

$$ASQ = \tfrac{1}{2}OQ.(QA - RS) = \tfrac{1}{2}a^2(E - e\sin E)$$

und

$$ASP = \frac{b}{a}ASQ = \tfrac{1}{2}a^2\cos\varphi(E - e\sin E);$$

so wird auch

$$ASP = \tfrac{1}{2}a^2\cos\varphi.\frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(Theor. mot. pag. 6.)}$$

$$= \tfrac{1}{2}kt\sqrt{p}.\sqrt{1+\mu} = \tfrac{1}{2}\int rr dv.$$

ASP ist also der, in der Zeit t beschriebene Sector.

§. 3.

Anmerkung. Wegen der schwierigen Construction dieser Curve (der Cycloide) ist in der Praxis zweckmässiger eine

Construction anzuwenden, welche der Wahrheit sehr nahe kommt.

Man suche einen bestimmten Winkel B, welcher sich zu dem Winkel $57^{\circ},29578 = 206264'',808$, den ein dem Radius gleicher Bogen unterspannt, verhält, wie die Entfernung SH (Taf. II. Fig. 4.) beider Brennpunkte von einander zur grossen Axe AB. Ferner suche man eine Linie L, welche sich zum Radius verhält, wie AB zu SH. Hat man beide einmal gefunden, so löst man die Aufgabe durch folgende Analyse.

Nach irgend einer Methode oder Conjectur bestimme man den Ort P ziemlich nahe und fälle von ihm auf die grosse Axe das Perpendikel PR, so erhält man die entsprechende Ordinate QR des um die Ellipse beschriebenen Kreises AQB aus dem Verhältniss beider Axen der Ellipse, und es ist alsdann

$$QR = AC.\sin ACQ.$$

Aus dieser Gleichung findet man den Winkel ACQ, welchen man nur nahebei durch Rechnung zu bestimmen braucht. Man kennt ferner auch den der Zeit proportionalen Winkel, welcher sich nämlich zu 360° verhält, wie die zur Beschreibung des Bogens AP erforderliche Zeit zur ganzen Umlaufszeit. Dieser Winkel sei $= N$. Hierauf bestimme man die Winkel D, E, F, G, H, J, etc. aus den Proportionen:

$D : B = \sin ACQ : \text{Radius};$

$E : N - ACQ + D = L : L \mp \cos ACQ$, $\mp$ jenachdem $ACQ \lesseqgtr 90^{\circ}$;

$F : B = \sin(ACQ + E) : \text{Radius};$

$G : N - ACQ - E + F = L : L \mp \cos(ACQ + E)$,

$\mp$ jenachdem $ACQ + E \lesseqgtr 90^{\circ}$;

$H : B = \sin(ACQ + E + G) : \text{Radius};$

$J : N - ACQ - E - G + H = L : L \mp \cos(ACQ + E + G)$,

$\mp$ jenachdem $ACQ + E + G \lesseqgtr 90^{\circ}$;

u. s. w. f.

Man kann auf diese Weise beliebig fortfahren, und nimmt man zuletzt den Winkel

$$ACq = ACQ + E + G + J + \text{etc.},$$

so ergibt sich aus seinem Cosinus $= Cr$ und der Ordinate pr, welche letztere aus der Proportion

$$pr : \sin ACq = b : a$$

bekannt wird, der verbesserte Ort p des Körpers.

Wird in einem einzelnen Falle der Winkel

$$N - ACQ + D$$

negativ, so muss bei E überall das Zeichen $+$ in $-$ und umgekehrt

$$r_k, r_{k+1}, r_{k+2}, r_{k+3}, \ldots r_{k+i-1}^{c}$$

endliche wiederkehren müssten, man also niemals auf einen vindenden Rest kommen könnte, welches doch bekanntlich it endlich einmal der Fall sein muss.
ıd nun a und b relative Primzahlen, so ist deren grösstes schaftliches Maass $\frac{a}{m}$ (m. s. den vorhergehenden Aufsatz) die , und folglich $m=a$. Also können offenbar die $a-1$ nicht rindenden, sämmtlich unter einander ungleichen Reste

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots . r_{a-1}$$

alle kleiner als a sind, nur die in einer gewissen Ordnung nenen ganzen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots ., a-1$$

nd es muss also unter den Resten

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots . r_{a-1}$$

ı Fällen die Einheit vorkommen.
zeichnen wir jetzt denjenigen unter den Resten

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_{a-1}$$

r der Einheit gleich ist, durch r_k, und setzen also $r_k=1$, en wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1,\\
r_1 + b &= aq_2 + r_2,\\
r_2 + b &= aq_3 + r_3,\\
r_3 + b &= aq_4 + r_4,\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{k-2} + b &= aq_{k-1} + r_{k-1},\\
r_{k-1} + b &= aq_k + 1;
\end{aligned}$$

ı deren Addition sich die Gleichung

$$bk = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) + 1$$

$$bk - a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) = 1$$

t.
aben wir nun die unbestimmte Gleichung des ersten Grades hen zwei unbekannten Grössen

$$bx - ay = 1,$$

und b relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern nach Vorhergehenden offenbar die Werthe

$$E - e \sin E$$

ist; so folgt, weil $AQ = a \cdot E$ und das Perpendikel von S auf CQ oder

$$SV = SC \cdot \sin SCQ = ae \sin E,$$

also

$$AQ - SV = a(E - e \sin E),$$

dass auch ASP proportional dem Unterschiede

$$AQ - SV$$

sein wird.

XX.

Welche Lage muss man einem Stahlstabe geben, damit er das Maximum der magnetisirenden Wirkung eines kreisförmigen electrischen Stromes erfahre?

Von dem

Herrn Doctor Dippe,

Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

---

§. 1.

Zu der Beantwortung dieser Frage wurde ich geführt, als ich das in Pogg. Ann. LXII. S. 249. beschriebene Verfahren zur Magnetisirung einiger Stahlstäbe anwandte. Es fiel mir dabei nämlich eine Stelle im Repert. der Physik von Dove und Moser (I. S. 263.), wo ein von Barlow beschriebener Versuch als fabelhaft klingend bezeichnet wird. Jene Stelle heisst: „So kräftig ist die Wirkung einer Spirale, dass, wenn eine kleine Magnetnadel (or bar) in sie so hineingelegt wird, dass sie auf dem untern Theile der Windungen ruht, diese Nadel im Momente der Verbindung der Spirale mit der galvanischen Kette aufspringt, und er Axe der Spirale den Gesetzen der Schwere entgegen schw

hend bleibt. Diese Erscheinung zeigt sich selbst bei senkrechter Stellung der Spirale, und man sieht auf diese Weise einen schweren Körper ohne materiellen Zusammenhang mit andern Körpern gehalten durch eine unsichtbare Kraft wie die fabelhafte Statue des Dinocharres."

Ich wiederholte nun diesen Versuch mit meinem Magnetisircylinder, einer Spirale aus 30 Fuss Kupferdraht, welcher auf einen hohlen hölzernen Cylinder von 1 Zoll Höhe, 1¼ Zoll innerem Durchmesser und geringer Wanddicke gewickelt war, und den Strom eines Platin-Zink-Elements leitete, und fand die Beschreibung allerdings mindestens ungenau. Eisenstäbchen wie Magnetnadeln blieben ruhig auf dem untersten Theile der Windungen liegen, wenn die Axe der Spirale horizontal lag. Hielt ich ein Eisenstäbchen mit dem einen Ende an die innere Wand des Cylinders, so wurde es im Momente der Schliessung der Kette lebhaft nach innen gezogen, so dass es zu beiden Seiten gleich weit aus dem Cylinder hervorragte, blieb aber wiederum auf dem untersten Theile der inneren Wand liegen. Als ich die Axe des Cylinders vertikal stellte, schwebte der Stab in dem Cylinder in vertikaler Lage, aber immer sich an die Seitenwand anlegend, und jeder Versuch, denselben in der Axe des Cylinders frei schwebend zu erhalten, war vergeblich, eben so vergeblich, als wenn Jemand versuchen wollte, einem Magneten seinen Anker gerade in der Entfernung darzubieten, in welcher die anziehende Kraft des Magneten und die Schwere des Ankers im Gleichgewicht sind, so dass der Anker frei in der Luft schwebte.

Diese Versuche nun, sowie der Umstand, dass die Dicke einiger von den zu magnetisirenden Stäben bedeutend geringer war als die innere Weite des Cylinders führten mich zu der obigen Frage, deren Beantwortung für die vortheilhafteste Benutzung solcher Spiralen zum Magnetisiren nicht unwichtig ist. Da ich weder in Poggendorffs Annalen, noch in Gehlers Wörterbuche, noch in den Lehrbüchern der Physik Auskunft fand, so versuchte ich selbst die Beantwortung, und theile diesen Versuch hier mit.

§. 2.

Es liegt in der Natur der Sache, dass wir uns auf den Fall beschränken, wo der Stab mit der Axe des Cylinders parallel ist, so wie dass wir statt des spiralförmigen Drahtes uns die Peripherie eines Kreises als Leiter des electrischen Stromes vorstellen.

Als bewiesen wird vorausgesetzt:

1) Ein geradliniger electrischer Strom wirkt vertheilend auf ein ausserhalb liegendes magnetisches Theilchen in einer Richtung, welche auf der durch dies Theilchen und den Leitungsdraht gelegten Ebene senkrecht ist.

2) Denkt man sich mit dem Strome schwimmend und das magnetische Theilchen anblickend, so wird in der bezeichneten Richtung der Nordpol links, der Südpol rechts bewegt.

3) Die Wirkung eines jeden Elementes des Stromleiters ist der Länge dieses Elementes direct, und dem Quadrate des Abstandes dieses Elementes vom magnetischen Theilchen um-

gekehrt proportional, ausserdem aber noch direct
tional dem Sinus des Winkels, welchen die Verbindu
jenes Elementes und des magnetischen Theilchens
Stromesrichtung bildet.

4) Bei einem krummen Leitungsdrahte wird als Richtun
Elementes die entsprechende Tangente genommen.

Nun sei (Taf. II. Fig. 5.) A der Mittelpunkt des Kreises,
Peripherie den Strom leitet, B der Punkt seiner Ebene, in w
dieselbe von dem Stabe durchstochen wird. Das Element
Kreises wirke auf den Punkt F des Stabes vertheilend. D
und die Tangente ED lege man eine Ebene, und auf die
FG senkrecht, so wird das nordmagnetische Element des
F von F nach G bewegt, wenn der Strom von C nach
wie die Pfeile andeuten, und die Bewegung in dem obern
des Kreises von hinten nach vorn geschieht. Es messe
Intensität dieser Zerlegung, und GH sei senkrecht auf B
misst FH die Intensität, mit welcher das Element bei D d
netismus in F in der Richtung der Länge des Stabes zerl

Bezeichnet man nun den Radius des Kreises mit r,
r', und den zum Winkel DAC gehörenden Bogen des Nor
ses mit φ, endlich mit c eine constante Grösse, welche
Intensität des Stromes abhängt, so ist

$$FG = \frac{c \,.\, rd\varphi \,.\, \sin FDE}{DF^2},$$

und weil $FH = FG \,.\, \cos GFH$ ist,

$$FH = \frac{c \,.\, rd\varphi \,.\, \sin FDE \,.\, \cos GFH}{DF^2}.$$

Vermindern wir den Abstand BF, so wächst $\sin FI$
$\cos GFH$, während DF^2 kleiner wird; also wirkt Alles
men, um den Werth von FH wachsen zu lassen. Es
dass von allen Punkten des Stabes der Punkt B das M
der Wirkung erfährt. Nun zieht man aber in der Praxis d
in dem Cylinder hin und zurück, so dass abwechselnd d
und das andere Ende des Stabes in den Punkt B kommt,
jeder Theil des Stabes die Wirkung erfährt, die in B a
wird, und dann die hier hervorgebrachte Vertheilung nach
gabe seiner Coercitivkraft beibehält; also haben wir nur
die Wirkung des kreisförmigen Stromes auf
seiner Ebene in B befindliches magnetisches
chen aufzusuchen, und dann zu bestimmen, welch
der Punkt B in der Ebene des Kreises haben
damit die Wirkung ein Maximum sei.

Das Element bei D wirkt auf B mit der Kraft

$$dW = \frac{crd\varphi \,.\, \sin BDE}{DB^2} = \frac{crd\varphi \,.\, \cos BDA}{DB^2},$$

denn die frühere Ebene FDE ist jetzt die Ebene des
d das Loth FG fällt in die Richtung BF, mithin ist $\cos G$

Nun ist

$$\cos BDA = \frac{AD - AB.\cos DAB}{DB} = \frac{r - r'\cos\varphi}{DB},$$

und

$$DB = \{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2\}^{\frac{1}{2}},$$

folglich

$$1)\quad dW = \frac{crd\varphi(r - r'\cos\varphi)}{\{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Wird dieser Ausdruck integrirt und das Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen, so erhält man die gesammte Wirkung des Kreisstromes auf den Punkt B, und kann nun die Veränderungen aufsuchen, welche mit diesem Werthe vorgehen, wenn man die Lage des Punktes B in der Ebene des Kreises, also r', sich verändern lässt.

Es ist gut, gleich von vorne herein auch den Fall ins Auge zu fassen, dass $r' > r$ wird, das magnetische Theilchen also ausserhalb des Kreises, aber doch in seiner Ebene, etwa in B' (Taf. II. Fig. 6.), liegt. Man ziehe von B' die Tangenten $B'M$, $B'L$ an den Kreis, und verlängere $B'A$ bis zur Peripherie in P; dann wirken die Theile MCL und LPM in entgegengesetztem Sinne auf das magnetische Theilchen in B', und zwar ist die von LPM bewirkte Vertheilung des Magnetismus gleichartig mit der von dem Kreisstrome bei dem innerhalb des Kreises liegenden Punkte B bewirkten Vertheilung, die von dem Bogen MCL ausgeübte ist die entgegengesetzte. Ueberwiegt die letztere, so kehrt sich in dem Punkte B' der Südpol dem Beschauer zu, während in B der Nordpol der zugewandte Pol ist. Da in L und M die Tangenten mit den Verbindungslinien $B'L$, $B'M$ zusammenfallen, so ist die von diesen Punkten auf B' ausgeübte Wirkung Null.

Unser Differential (1) wird nun für alle Punkte auf MCL negativ, weil $r - r'\cos\varphi$ negativ wird, dagegen für alle Punkte auf LPM positiv, in L und M dagegen, wo $\varphi = \arccos\frac{r}{r'}$, wird dasselbe Null. Die Integration zwischen den Gränzen 0 und 2π liefert uns die algebraische Summe der Wirkungen, mithin die resultirende Wirkung der Grösse und Richtung nach. Es ist nämlich die Wirkung des ganzen Kreises offenbar das Doppelte der Wirkung des Halbkreises CLP, mithin

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dW = 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} dW = 2\left\{\int_{\varphi=0}^{\varphi=\arccos\frac{r}{r'}} dW + \int_{\varphi=\arccos\frac{r}{r'}}^{\varphi=\pi} dW\right\}$$

§. 3.

Wenden wir uns nun zur Integration der Gleichung 1)

$$dW = \frac{cr(r - r'\cos\varphi)}{(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.d\varphi.$$

Dieselbe wird sich ausführen lassen, wenn man im Stande den Werth

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

in eine nach Potenzen von $\cos\varphi$, oder noch besser in eine nach den Cosinus der Vielfachen von φ geordnete Reihe zu entwickeln. Denn, wenn man hat

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi+D\cos 3\varphi+\ldots$$

so wird

$$\frac{r-r'\cos\varphi}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{cases}Ar+Br\cos\varphi+Cr\cos 2\varphi+Dr\cos 3\varphi\\ -Ar'\cos\varphi-Br'\cos\varphi.\cos\varphi\\ -Cr'\cos 2\varphi.\cos\varphi\ldots\end{cases}$$

und wenn man hier überall

$$\cos p\varphi.\cos\varphi=\tfrac{1}{2}\cos(p+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\cos(p-1)\varphi$$

setzt, so erhält man

$$2)\quad \frac{r-r'\cos\varphi}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{aligned}&(Ar-\tfrac{1}{2}Br')\\ &+(Br-\frac{A+C}{2}r')\cos\varphi\\ &+(Cr-\frac{B+D}{2}r')\cos 2\varphi\\ &+(Dr-\frac{C+E}{2}r')\cos 3\varphi\\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Mithin ist

$$dW=crd\varphi\{(Ar-\tfrac{1}{2}Br')+(Br-\frac{A+C}{2}r')\cos\varphi+(Cr-\frac{B+D}{2}r')\cos 2\varphi+(Dr-\frac{C+E}{2}r')\cos 3\varphi..$$

also das Integral

$$\begin{aligned}W=&cr(Ar-\tfrac{1}{2}Br')\varphi+cr(Br-\frac{A+C}{2}r')\sin\varphi\\ &+\tfrac{1}{2}cr(Cr-\frac{B+D}{2}r')\sin 2\varphi\\ &+\tfrac{1}{3}cr(Dr-\frac{C+E}{2}r')\sin 3\varphi\\ &+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Da dies Integral zwischen den Gränzen

$$\varphi = 0 \text{ und } \varphi = 2\pi$$

genommen ist, so reducirt sich dasselbe auf den äusserst einfachen Werth

$$3)\quad W = 2cr\pi(Ar - \tfrac{1}{4}Br'),$$

in welchem die Grössen A und B noch bestimmt werden müssen.

§. 4.

Die Bestimmung der Coefficienten A und B geschieht durch die Ausführung der Entwickelung

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + \ldots,$$

welche am schnellsten nach dem binomischen Lehrsatze und den bekannten Reihen für die Potenzen der Cosinus sich ausführen lässt. Die Nothwendigkeit aber, zur Beantwortung unserer Frage nach convergirende Reihen zu gewinnen, erheischt einige Umwege, in deren Windungen die Darstellung von Lacroix in seinem Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. §. 112. ff. mir als Wegweiser gedient hat.

Bezeichnet man $\sqrt{-1}$ durch i, so hat man

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

wo e die bekannte Bedeutung hat. Dann ist

$$\begin{aligned} 4)\quad r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 &= r^2 - rr'(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + r'^2 \\ &= (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi}) \\ &= (r' - re^{i\varphi})(r' - re^{-i\varphi}). \end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst

$$r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 = (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi}),$$

so ist

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m} = (r - r'e^{i\varphi})^{-m} \cdot (r - r'e^{-i\varphi})^{-m},$$

und nun nach dem binomischen Lehrsatze

$$\begin{aligned} (r - r'e^{i\varphi})^{-m} = r^{-m}\{1 &+ m\cdot\frac{r'}{r}\cdot e^{i\varphi} + \frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 e^{2i\varphi} \\ &+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 e^{3i\varphi} \ldots\}, \end{aligned}$$

$$(r-r'e^{-i\varphi})^{-m}=r^{-m}\{1+m.\frac{r'}{r}.e^{-i\varphi}+\frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2e^{-2i\varphi}$$
$$+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\left(\frac{r'}{r}\right)^3e^{-3i\varphi}....\}.$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, und setzt man in dem Resultate überall wieder $e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=2\cos\varphi$ und $e^{pi\varphi}+e^{-pi\varphi}=2\cos p\varphi$, so erhält man

$$5)\ r^{-2m}\begin{cases}1+m^2.\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^4+\left(\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^6...\\ +2(m.\frac{r'}{r}+m^2.\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{r'}{r}\right)^3+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\frac{m+2}{3}\left(\frac{r'}{r}\right)^5..)\cos\varphi\\ +P\cos 2\varphi+Q\cos 3\varphi+R\cos 4\varphi....\end{cases}$$

wo die Coefficienten P, Q, R..... nicht entwickelt sind, da wir ihrer zu unserer Aufgabe nicht bedürfen. Bezeichnet man

$$6)\begin{cases}\text{die Reihe } 1+m^2.\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^4.... \text{ mit } \alpha\\ \text{u. die Reihe } 2(m.\frac{r'}{r}+m^2.\frac{m+1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2.\frac{m+2}{3}\left(\frac{r'}{r}\right)^5..)\text{ mit }\beta\end{cases}$$

so hat man

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}=r^{-2m}\{\alpha+\beta\cos\varphi...\},$$

und da

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}}=A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi....$$

sein sollte, so hat man

$$7)\ A=\frac{\alpha}{r^3}\text{ und }B=\frac{\beta}{r^3},$$

wenn man in den Reihen 6) statt m den Werth $\frac{3}{2}$ substituirt, und α und β dann berechnet. Sobald aber $\frac{r'}{r}$ nicht ein sehr kleiner Bruch ist, convergiren die Reihen in 6) nur langsam, weshalb man so unmittelbar nicht zum Ziele kommen kann.

Jene Reihen convergiren nun viel schneller, wenn man in denselben

$$m=-\tfrac{1}{2}$$

setzt, mithin $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{1}{2}}=r(\alpha+\beta\cos\varphi....)$ gewinnt.

Könnte man aus den Coefficienten dieser Reihe die Coefficienten der Entwickelung von $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}}$ herleiten, so würde die oben erwähnte Schwierigkeit vermindert sein.

§ 5.

Dies wird sich thun lassen, wenn man aus

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}=r^{-2m}(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi....)$$

herzuleiten weiss:

8) $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)}=r^{-2(m+1)}(\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi..)$,

so dass man α_1, β_1, γ_1.... als Functionen von α, β, γ.... erhält. Dann alsdann kann man auf dieselbe Weise von $-(m+1)$ zu $-(m+2)$ übergehen, mithin von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}-1$, von da zu $\frac{1}{2}-2$ oder $-\frac{3}{2}$. Nun ist aber

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)}=\frac{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}}{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2},$$

mithin auch

$$r^{-2(m+1)}\{\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi...\}=\frac{r^{-2m}(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi...)}{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2},$$

und wenn der Nenner weggeschafft wird:

$$\begin{aligned}&r^{-2}\{\alpha_1(r^2+r_1^2)+\beta_1(r^2+r_1^2)\cos\varphi+\gamma_1(r^2+r_1^2)\cos 2\varphi....\\&\quad-2\alpha_1rr'\cos\varphi-2\beta_1rr'\cos\varphi\cos\varphi-2\gamma_1rr'\cos 2\varphi\cos\varphi....\}\\&=\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi+\delta\cos 3\varphi....\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Entwickelung statt $\cos p\varphi\,.\cos\varphi$ seinen Werth

$$\tfrac{1}{2}\cos(p+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\cos(p-1)\varphi,$$

und bringt man dann alle Glieder auf eine Seite, so erhält man

$$\begin{aligned}&(\alpha_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-r^2\alpha)\\&+(\beta_1(r^2+r'^2)-2\alpha_1rr'-\gamma_1rr'-r^2\beta)\cos\varphi\\&+(\gamma_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-\delta_1rr'-r^2\gamma)\cos 2\varphi\\&+\text{u. s. w.}=0.\end{aligned}$$

Es giebt zur Bestimmung der Coefficienten α_1, β_1, γ_1.... die Gleichungen

$$\begin{aligned}&\alpha_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-r^2\alpha=0,\\&\beta_1(r^2+r'^2)-2\alpha_1rr'-\gamma_1rr'-r^2\beta=0,\\&\gamma_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-\delta_1rr'-r_2\gamma=0,\\&\qquad\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

durch deren Auflösung man erhält:

$$9)\quad \beta_1=\frac{\alpha_1(r^2+r'^2)-\alpha r^2}{rr'},$$

$$10)\quad \gamma_1 = \frac{\beta_1 (r^2 + r'^2) - 2\alpha_1 rr' - r^2\beta}{rr'},$$

$$11)\quad \delta_1 = \frac{\gamma_1 (r^2 + r'^2) - \beta_1 rr' - r^2\gamma}{rr'},$$

u. s. w.

Es können also die Coefficienten β_1, γ_1, δ_1.... der Entwicklung von $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-(m+1)}$ durch die Coefficienten der Entwickelung von $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m}$ ausgedrückt werden, wenn nur der erste der gesuchten Coefficienten, nämlich α, bekannt ist. Diesen zu ermitteln wird nun unsere nächste Aufgabe sein.

§. 6.

Könnten wir die Relation finden, welche zwischen den Coefficienten α, β, γ, δ.... der Entwickelung von $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m}$ besteht, so muss dieselbe, nach Substituirung von $m+1$ statt m, auch gelten für die Coefficienten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... der gesuchten Entwickelung. Liesse sich z. B. γ durch α und β ausdrücken, so hätten wir auch γ_1 durch α_1 und β_1 ausgedrückt, und da auch die Formel 10) uns γ_1 als Function von α_1 und β_1 liefert, so giebt uns die Gleichsetzung dieser beiden Werthe von γ_1 den Werth der Coefficienten α_1.

Nehmen wir nun, um jenen Zusammenhang zwischen den Coefficienten α, β, γ.... aufzufinden, von

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m} = r^{-2m}(\alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\cos 2\varphi....)$$

die Logarithmen, und darauf das Differential nach φ, so kommt zunächst

$$\frac{2mrr'\sin\varphi}{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2} = \frac{\beta\sin\varphi + 2\gamma\sin 2\varphi + 3\delta\sin 3\varphi...}{\alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\cos 2\varphi + \delta\cos 3\varphi...}.$$

Wenn dann die Nenner weggeschafft, statt $\sin\varphi.\cos p\varphi$ und statt $\cos\varphi.\sin p\varphi$ ihre Werthe, nämlich $\frac{1}{2}\sin(p+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(p-1)\varphi$ und $\frac{1}{2}\sin(p+1)\varphi + \frac{1}{2}\sin(p-1)\varphi$, gesetzt, und alle Glieder auf eine Seite geschafft werden, so erhält man

$$\begin{aligned}&\{2mrr'\alpha - (m-2)rr'\gamma - (r^2 + r'^2)\beta\}\sin\varphi\\ &+ \{mrr'\beta - (m-3)rr'\delta - 2(r^2 + r'^2)\gamma\}\sin 2\varphi\\ &+ P\sin 3\varphi + Q\sin 4\varphi + ... = 0.\end{aligned}$$

Der Coefficient von $\sin\varphi$, den wir, wie die übrigen, gleich Null setzen müssen, liefert uns

$$12)\quad \gamma = \frac{2mrr'\alpha - (r^2 + r'^2)\beta}{(m-2)rr'}.$$

Vertauscht man m mit $m+1$ und α, β, γ.... mit α_1, β_1, γ_1...., so hat man

$$13)\quad \gamma_1 = \frac{2(m+1)rr'\alpha_1 - (r^2+r'^2)\beta_1}{(m-1)rr'}.$$

Setzt man nun die beiden Werthe von γ_1 in 10) und 13) gleich, so erhält man eine Gleichung für α_1, β_1, und aus derselben

$$14)\quad \beta_1 = \frac{4mrr'\alpha_1 + (m-1)r^2\beta}{m(r^2+r_1^2)}.$$

Allein es war nach 9) auch

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1(r^2+r'^2) - \alpha r^2}{rr'},$$

folglich kann man beide gleich setzen, und erhält eine Gleichung, in der α_1 die einzige Unbekannte ist. Daraus ergiebt sich

$$15)\quad \alpha_1 = r^2 \cdot \frac{(m-1)rr'\beta + m(r^2+r'^2)\alpha}{m(r^2-r'^2)^2},$$

und wenn dies berechnet ist, aus 9) oder 14) auch β_1.

§. 7.

Nun verfahre man, wie §. 5. schon angegeben ist, indem man auf dieselbe Weise von der Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)} = r^{-2(m+1)}\{\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi\ldots\}$$

zu der Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+2)} = r^{-2(m+2)}\{\alpha_2+\beta_2\cos\varphi+\gamma_2\cos 2\varphi\ldots\}$$

übergeht. Man erhält nach Analogie von 15), 9) und 14)

$$16)\quad \alpha_2 = r^2 \cdot \frac{mrr'\beta_1 + (m+1)(r^2+r'^2)\alpha_1}{(m+1)(r^2-r'^2)^2},$$

$$17)\quad \beta_2 = \frac{\alpha_2(r^2+r'^2) - \alpha_1 r^2}{rr'},$$

$$18)\quad \gamma_2 = \frac{4(m+1)rr'\alpha_2 + mr^2\beta_1}{(m+1)(r^2+r'^2)}.$$

In unserm Falle sollte nun $m = -\frac{1}{2}$ gesetzt werden, damit $m+2 = \frac{3}{2}$ werde, und aus der Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{1}{2}} = r(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi\ldots)$$

die Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}(\alpha_2+\beta_2\cos\varphi+\gamma_2\cos 2\varphi\ldots)$$

hervorgehe.

Führt man dies aus, so erhält man aus 15) u. 9), 16) u

$$19)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3rr'\beta + (r^2+r'^2)\alpha}{(r^2-r'^2)} \cdot r^2, \\ \beta_1 = \dfrac{(r^2+r_1^2)\alpha_1 - \alpha r^2}{rr'}, \\ \alpha_2 = \dfrac{(r^2+r'^2)\alpha_1 - rr'\beta_1}{(r^2-r'^2)^2} \cdot r^2, \\ \beta_2 = \dfrac{(r^2+r'^2)\alpha_2 - \alpha_1 r^2}{rr'}. \end{cases}$$

Jetzt braucht man nur in den beiden letzten Werthen üb statt α_1, β_1 die durch die beiden ersten Formeln gegebenen W zu substituiren und die Reductionen auszuführen, um folg sehr einfache Werthe zu erhalten:

$$20)\quad \alpha_2 = \frac{\alpha r^4}{(r^2-r_1^2)^2},$$

$$21)\quad \beta_2 = \frac{-3\beta r^4}{(r^2-r'^2)^2}.$$

Es sind mithin von der Entwickelung

$$22)\quad (r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}\{\alpha_2+\beta_2\cos\varphi+\gamma_2\cos 2\varphi.$$

die ersten Glieder gefunden.

§. 8.

Die Lösung unserer Aufgabe hatten wir davon abhängig ge (cf. §. 3.), dass für

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

die Reihe

$$A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi....$$

gefunden würde. Dies ist in §. 7. geschehen, wenn wir die F these auf der rechten Seite von 22) auflösen; mithin ist

$$A = r^{-3}.\alpha_2,\quad B = r^{-3}.\beta_2,$$

oder mit Benutzung der Formeln 20) und 21)

$$23)\quad A = \frac{\alpha r}{(r^2-r_1^2)^2},$$

$$24)\quad B = \frac{-3\beta r}{(r^2-r_1^2)^2}.$$

Unser Integral, welches die Gesammtwirkung des kreisförmi-
ru Stromes ausdrückt, war nach §. 3.

$$W=2cr\pi(Ar-\tfrac{1}{2}Br');$$

eser Werth verwandelt sich jetzt in

$$25)\quad W=2cr^2\pi\frac{\alpha r+\frac{3}{2}\beta r'}{(r^2-r'^2)^2}.$$

rückt man die Entfernung r' in Theilen des Halbmessers r aus,
tzt man also

$$r'=pr,$$

) verwandelt sich 25) in

$$26)\quad W=\frac{2c\pi}{r}\cdot\frac{\alpha+\frac{3}{2}p\beta}{(1-p^2)^2}.$$

Die Reihen aber, welche wir der Kürze wegen mit α und β bezeich-
et haben, sind

$$27)\quad \alpha=1+\frac{1}{2^2}p^2+\frac{1.1}{2^2.4^2}p^4+\frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}p^6+\frac{1.1.3^3.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}p^8\ldots,$$

$$28)\quad \beta=2(-\tfrac{1}{2}p+\frac{1}{2^2}\cdot\tfrac{1}{4}p^3+\frac{1.1}{2^2.4^2}\cdot\tfrac{3}{6}p^5+\frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\tfrac{5}{8}p^7\ldots),$$

indem man in §. 4. Nr. 6) nur $m=-\frac{1}{2}$ und $\frac{r'}{r}=p$ zu setzen hat
Für $p=0$, d. i. $r'=0$, also für den Mittelpunkt des kreis-
förmigen Stromes, ist $\alpha=1$ und $\beta=0$, mithin reducirt sich das
Integral auf

$$\frac{2c\pi}{r},$$

was der bekannte Ausdruck für die Einwirkung des Kreisstromes
auf ein in seinem Mittelpunkte befindliches magnetisches Theil-
chen ist. Diese Einwirkung ist nun ein Minimum im Vergleich
mit derjenigen, welche alle andern Punkte innerhalb des Krei-
ses erfahren. Denn die Berechnung des Integrals 26) giebt, wenn
wir den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2c\pi}{r}$ weglassen:

für den Mittelpunkt des Kreises	1,000000
für $r'=\frac{1}{100}r$ dagegen	1,000075
„ $r'=\frac{1}{10}r$	1,007572
„ $r'=\frac{5}{10}r$	1,245620
„ $r'=\frac{9}{10}r$	3,9256
„ $r'=r$	unendlich gross.

Es wächst also die Wirkung vom Mittelpunkte, wo
e ein Minimum ist, bis zur Peripherie des Kreises

continuirlich, und würde bei gehöriger Annäherung an die Peripherie über alle Gränzen hinaus wachsen, wenn ein Leitungsdraht von unmerklicher Dicke einen starken electrischen Strom leiten könnte.

Für das Magnetisiren ergeben sich dann folgende Regeln:

1) Hat man nur Stahlstäbe von constanten Dimensionen zu magnetisiren, so gebe man dem Magnetisircylinder eine solche Weite, dass der Stab so eben in demselben sich hin und herziehen lässt.
2) Ist die Dicke des Stabes geringer als die innere Weite des Cylinders, so bewege man den Stab so in dem Cylinder hin und her, dass er die innere Seitenwand immer berührt, und lasse diese Berührung nach und nach jeder Seite des Stabes zu Theil werden.

Ferner ist aus dem Bisherigen offenbar, dass bei gewöhnlichen Electromagneten der Magnetismus in der Oberfläche des Eisens ohne Vergleich stärker entwickelt wird, als in dem Innern.

§. 9.

Es ist von Interesse, auch die Intensität der Einwirkung eines Kreisstromes auf einen ausserhalb des Kreises in seiner Ebene gelegenen Punkt zu untersuchen. Die bisher gefundenen Formeln scheinen diesen Fall nicht mit zu umfassen, weil die Reihen für α und β in §. 8. nicht convergent bleiben, wenn $p > 1$ gesetzt wird.

Nun sind wir aber bei der Entwickelung von

$$(r^2 - 2rr' \cos\varphi + r'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe nach den Cosinus der Vielfachen von φ im §. 4. von der Betrachtung ausgegangen, dass

$$r^2 - 2rr' \cos\varphi + r'^2 = (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi})$$

gesetzt werden könne; es wurde aber dort schon bemerkt, dass mit demselben Recht

$$r^2 - 2rr' \cos\varphi + r'^2 = (r' - re^{i\varphi})(r' - re^{-i\varphi})$$

gesetzt werden kann. Man kann also in der ganzen Entwickelung r mit r' vertauschen und wird dies thun, wenn $r' > r$ ist, das magnetische Theilchen also ausserhalb des Kreisstromes liegt. Dann hat man zur Berechnung des Integrals

$$W = 2cr\pi(Ar - \tfrac{1}{2}Br'),$$

welches die Intensität der magnetisirenden Wirkung angiebt, die Formeln

$$29)\quad \alpha = 1 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \frac{1.1}{2^2.4^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^4 + \frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^6 \ldots,$$

$$30)\quad \beta = 2\left\{-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r}{r'} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{r}{r'}\right)^3 + \frac{1.1}{2^2.4^2}\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{r}{r'}\right)^5 \ldots\right\},$$

$$31)\quad A = \frac{\alpha r_1}{(r'^2 - r^2)^2},$$

$$32)\quad B=\frac{-3\beta r'}{(r'^2-r^2)^2},$$

und das Integral nimmt jetzt die Form an

$$33)\quad W=2c\pi.\frac{\alpha rr'+\frac{3}{2}\beta r'r'}{(r'^2-r^2)^2}.$$

Setzt man jetzt $\frac{r}{r'}=p$, also $r'=\frac{1}{p}.r$, mit p einen ächten Bruch bezeichnend, so ergeben sich für α und β aus 29) und 30) dieselben Reihen, welche wir im §. 8. Nr. 27) und 28) erhalten haben. Man kann also jeden der dort für α und β erhaltenen Werthe unmittelbar benutzen, um die Einwirkung des Stromes auf einen ausserhalb liegenden Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkte

$$r'=\frac{1}{p}.r$$

ist, zu erfahren. Das Integral 33) nimmt durch die Substitution von $\frac{1}{p}r$ statt r' die Form an

$$34)\quad W=\frac{2c\pi}{r}.\frac{(ap+\frac{3}{2}\beta)p^2}{(1-p^2)^2}.$$

Die Ausführung der Rechnung giebt, wenn wir wieder den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2c\pi}{r}$ weglassen:

für $p=0$, also $r'=\infty$ die Grösse der Vertheilung $=0$,
„ $p=\frac{1}{100}$, „ $r'=100r$ „ „ „ „ $=-0{,}0000005$
„ $p=\frac{1}{10}$, „ $r'=10r$ „ „ „ „ $=-0{,}0005056$
„ $p=\frac{5}{10}$, „ $r'=2r$ „ „ „ „ $=-0{,}08622$
„ $p=\frac{9}{10}$, „ $r'=1\frac{1}{9}r$ „ „ „ „ $=-2{,}227.$

Das negative Vorzeichen deutet an, dass die Pole des magnetischen Theilchens ausserhalb des Kreises die entgegengesetzte Lage haben.

Besonders bemerkenswerth ist die Vergleichung der für $r'=0$ und $r'=2r$ gefundenen Werthe, wonach die Einwirkung eines Kreisstromes auf einen um den Radius von der Peripherie entfernten ausserhalb liegenden Punkt beinahe 9 Procent derjenigen Wirkung beträgt, welche der Mittelpunkt des Kreises erfährt.

§. 10.

Ich habe das Integral noch für einige andere Werthe von p berechnet, und lasse die Resultate in Verbindung mit den §. 8. und §. 9. gegebenen hier folgen, indem ich die Entfernung r' als Ab-

stand vom Mittelpunkte, den von dem Factor $\frac{2c\pi}{r}$ befre
Werth des Integrals als magnetische Vertheilung bezeic

Abstand vom Mittelpunkte.	Magnetische Vertheilung.
0	1
$\frac{1}{10}r$	1,0076
$\frac{2}{10}r$	1,0288
$\frac{3}{10}r$	1,0731
$\frac{4}{10}r$	1,1413
$\frac{5}{10}r$	1,2456
$\frac{6}{10}r$	1,4105
$\frac{7}{10}r$	1,6922
$\frac{8}{10}r$	2,2569
$\frac{9}{10}r$	3,9256
r	unendlich gross
$1\frac{1}{9}r$	−2,227
$1\frac{1}{4}r$	−0,7896
$1\frac{3}{7}r$	−0,3621
$1\frac{2}{3}r$	−0,1776
$2r$	−0,08622
$2\frac{1}{2}r$	−0,03891
$3\frac{1}{3}r$	−0,01502
$5r$	−0,00419
$10r$	−0,00051

XXI.

Allgemeine Sätze für eine Theorie d höheren Differential-Quotienten.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Man kann von der Theorie der höheren Differenzial-Quoti ten ohne Uebertreibung behaupten, dass sie den unvollständigs Theil der Differenzialrechnung bildet, welcher einer Begründ

aus allgemeinen Principien noch gänzlich entbehrt. In der That ist für dieselbe bis jetzt weiter nichts geschehen, als dass man eine Partie ganz specieller Funktionen, wie z. B.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}},\quad \frac{x}{a^2+b^2x^2},\quad \frac{e^x}{e^x+a},\text{ etc.}$$

behandelt und bald durch diesen, bald durch jenen Kunstgriff, wie ihn eben die Natur der Funktion zuliess, die Form der höheren Differenzial-Quotienten bestimmt hat. Diese Betrachtungsweise bringt aber den Nachtheil, dass man zu keinen allgemeinen Gesetzen gelangt, die auf alle solche Funktionen, welche die Veränderliche auf die nämliche Weise enthalten (z. B. als Quadrat, als Exponent von e etc.) gleichförmig anwendbar wären. — Der hieraus entspringende Mangel an Zusammenhang lässt sich nun dadurch beseitigen, dass man die Differenzial-Quotienten sehr allgemeiner Funktionen, wie z. B.

$$f(x^\lambda),\ f(e^x),\text{ u. dgl.,}$$

welche die obengenannten Ausdrücke als spezielle Fälle enthalten, zu entwickeln versucht. Der Anfang eines solchen Calcüls sähe etwa so aus:

$$\frac{df(x^\lambda)}{dx}=\lambda x^{\lambda-1}f'(x^\lambda).$$

$$\frac{d^2f(x^\lambda)}{dx^2}=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}f'(x^\lambda)+\lambda^2x^{2\lambda-2}f''(x^\lambda),$$

$$\frac{d^3f(x^\lambda)}{dx^3}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}f'(x^\lambda)+3\lambda^2(\lambda-1)x^{2\lambda-3}f''(x^\lambda)+\lambda^3x^{3\lambda-3}f'''(x^\lambda),$$

u. s. f. *)

Ebenso leicht findet man

$$\frac{df(e^x)}{dx}=e^xf'(e^x),$$

$$\frac{d^2f(e^x)}{dx^2}=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x),$$

*) Die Symbole $f'(\infty^\lambda)$, $f''(\infty^\lambda)$ etc. bezeichnen hier, dass man erst der Funktion f eine Veränderliche, etwa y, leihen, nach dieser schlechthin (als wäre sie unabhängig) differenziren und nach geschehener Differenziation $y=\infty^\lambda$ setzen solle. So wäre z. B. für $f(y)=ly$, $f'(y)=\frac{1}{y}$, $f''(y)=-\frac{1}{y^2}$ und $f'(\infty^\lambda)=\frac{1}{\infty^\lambda}$, $f''(\infty^\lambda)=-\frac{1}{(\infty^\lambda)^2}$, etc., woraus der Sinn jener Bezeichnung völlig erhellt.

$$\frac{d^3f(e^x)}{dx^3} = e^x f'(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x),$$

u. s. w.

Es ist nicht schwer, die allgemeine Form zu entdecken, unter welcher diese Gleichungen stehen. Bezeichnen wir nämlich mit

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \ldots \overset{n}{A}_n$$

constante Coeffizienten, so ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n} f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n} f''(x^\lambda) + \ldots . \\ \ldots . + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n} f^{(n)}(x^\lambda)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots . \\ \ldots . + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei natürlich die Coeffizienten A in der zweiten Gleichung andere Werthe haben, als in der ersten. Aber eben diese Werthe zu finden, ist das Schwerste an der ganzen Betrachtung, da die Rekursionsskale, welche man leicht für die Coeffizienten verschiedener Ordnungen finden kann, zur independenten Bestimmung derselben nicht ausreicht. Durch eine eigenthümliche Methode indessen ist es dem Verfasser geglückt, diese Schwierigkeiten zu heben und die Resultate seiner Untersuchungen sind die folgenden Sätze, denen ihre synthetischen Beweise folgen mögen.

I. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleichung

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\} \quad (3$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\left\{(p\lambda)_n - (\overline{p-1}\lambda)_n p_1 + (\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots \pm \lambda_n p_{p-1}\right\} \quad (4$$

wobei p_1, p_2, etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten p und $(p\lambda)_n$, $(\overline{p-1}\lambda)_n$, etc. den jedesmaligen $n$ten Coeffizienten der Exponenten $p\lambda$, $\overline{p-1}\lambda$, etc. bezeichnen.

Beweis.

Da die Formel 4) für $n=1$ ein Resultat liefert, welches mit der früheren direkten Formel für $\frac{df(x^\lambda)}{dx}$ übereinstimmt, so habe

$$f^{(p)}(y) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)\frac{(a+y)^\mu}{(a+y)^p};$$

olglich

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}$$

$$= \mu_p \overset{n}{E}_p \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}.$$

Bringen wir diess in der Gleichung (9) für $p=1, 2, 3, \ldots n$ in Anwendung, so ergiebt sich:

$$\frac{d^n(a+x^\lambda)^\mu}{dx^n} = \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{\mu_1\overset{n}{E}_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)+\mu_2\overset{n}{E}_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2\right.$$

$$\left.+\mu_3\overset{n}{E}_3\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^3+\ldots+\mu_n\overset{n}{E}_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\} \quad (10)$$

ein durch seine Allgemeinheit und Eleganz bemerkenswerthes Theorem.

2) Es sei

$$f(y) = e^{ay},$$

also

$$f^{(p)}(y) = a^p e^{ay}$$

und

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{a^p}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p e^{ax^\lambda},$$

so wird

$$\frac{d^n e^{ax^\lambda}}{dx^n} = \frac{e^{ax^\lambda}}{x^n}\left\{\overset{n}{E}_1\frac{ax^\lambda}{1}+\overset{n}{E}_2\frac{(ax^\lambda)^2}{1.2}+\ldots+\overset{n}{E}_n\frac{(ax^\lambda)^n}{1.2\ldots.n}\right\} \quad (11)$$

Zu bemerken ist noch, dass es zwei spezielle Fälle giebt, in welchen sich die Reihe

$$(p\lambda)_n - \overline{(p-1}\lambda)_n p_1 + \overline{(p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots,$$

welche zur Bestimmung von $\overset{n}{A}_p$ oder $\overset{n}{E}_p$ dient, summiren lässt. Man findet nämlich für $\lambda=-1$:

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^n\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p}(n-1)_{p-1} = (-1)^n\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)}n_p$$

und daher nach Nr. (3)

$$\frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1.2...(n-1)}{x^n}\left\{\frac{n_1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{n_2}{1.x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{n_3}{1.2.x^3}f'''\left(\frac{1}{x}\right)+.....+\frac{n_n}{1.2....(n-1)x^n}f^{(n)}\left(\right.\right.$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$(-1)^n\frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{1}{x^n}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1)n_1}{x^{2n-1}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)n_2}{x^{2n-2}}f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)+....$$

Ferner findet man für $\lambda=+2$:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2.3...n}{1.2.3...p}p_{n-p}2^{2p-n},$$

und daraus für $p=1, 2, ...n$:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = \frac{1.2...n}{(2x)^n}\left\{\frac{1_{n-1}}{1}(2x)^2 f'(x^2)+\frac{2_{n-2}}{1.2}(2x)^4 f''(x^2)+...\right.$$
$$\left....+\frac{(n-1)_1}{1.2...(n-1)}(2x)^{2n-2}f^{(n-1)}(x^2)+\frac{n_0}{1.2...n}(2x)^{2n}f^{(n)}(x\right.$$

oder bei umgekehrter Anordnung

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n\{f^{(n)}(x^2)+\frac{n\cdot(n-1)_1}{(2x)^2}f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+\frac{n(n-1).(n-2)_2}{(2x)^4}f^{(n-2)}(x^2)+$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2)+2.n_2(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+3.4.n_4(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+4.5.6.n_6(2x)^{n-6}f^{(n-3)}(x^2)+....$$

wovon die in Archiv. Thl. IV. S. 364. etc. gegebenen Formeln spezielle Fälle sind.

II. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleich

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x)+\overset{n}{A}_2 e^{2x}f''(e^x)+....+\overset{n}{A}_n e^{nx}f^{(n)}(e^x) \quad (1$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2...p}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - .... \pm 1^n p_{p-1}\}... \quad (15)$$

Beweis.

Differenzirt man zu Behuf des Beweises von n auf $n+1$ die Gleichung (14), so wird

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = 1\overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + 2\overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + 3\overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

$$+ \overset{n}{A}_1 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

Setzen wir dagegen

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = \overset{n+1}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n+1}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n+1}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

und vergleichen diese Coeffizienten mit den vorigen, so ist

$$\overset{n+1}{A}_1 = 1\overset{n}{A}_1,$$
$$\overset{n+1}{A}_2 = 2\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_1,$$
$$\overset{n+1}{A}_3 = 3\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_2,$$
$$\text{etc.}$$

überhaupt für ein ganzes positives p:

$$\overset{n+1}{A}_p = p\overset{n}{A}_p + \overset{n}{A}_{p-1},$$

d. h. vermöge der Werthe von $\overset{n}{A}_p$ und $\overset{n}{A}_{p-1}$:

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2...(p-1)}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + ...$$
$$+ (p-1)^n - (p-2)^n (p-1)_1 + (p-3)^n (p-1)_2 - ....\}.$$

Nimmt man je zwei unter einander stehende Glieder mit Hülfe des Satzes

$$p_r - (p-1)_{r-1} = (p-1)_r$$

zusammen, so wird

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2...(p-1)}\{p^n - (p-1)^n (p-1)_1 + (p-2)^n (p-1)_2 - ...\} \quad (16)$$

Man hat aber bekanntlich

$$(p-1)_r = \frac{p-r}{p} p_r,$$

folglich

$$(p-r)^n (p-1)_r = \frac{1}{p}(p-r)^{n+1} p_r,$$

und mithin durch Anwendung dieses Satzes für $p=0, 1, 2, \ldots$

$$A_p^{n+1} = \frac{1}{1.2....p}\{p^{n+1} - (p-1)^{n+1} p_1 + (p-2)^{n+1} p_2 - \ldots\} \ldots \quad (17$$

was das Nämliche ist, als wenn man in der Formel (15) $n+1$ fü n gesetzt hätte. Das dort ausgesprochene Bildungsgesetz ist der nach richtig.

Anwendungen.

Setzt man

$$K_p^n = p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \ldots \quad (18)$$

so wird

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \frac{1}{1} K_1^n e^x f'(e^x) + \frac{1}{1.2} K_2^n e^{2x} f''(e^x) + \frac{1}{1.2.3} K_3^n e^{3x} f'''(e^x) +$$
$$\ldots + \frac{1}{1.2...n} K_n^n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \ldots \quad (19)$$

was für die Anwendung bequemer ist.

1) Für $f(y) = l(a+y)$, also $f^{(p)}(y) = \frac{1.2...(p-1)}{(a+y)^p}(-1)^p$

und

$$\frac{1}{1.2...p} K_p^n e^{px} f^{(p)}(e^x) = \frac{(-1)^p}{p} K_p^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p$$

erhalten wir

$$\frac{d^n l(a+e^x)}{dx^n} = \frac{1}{1} K_1^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \frac{1}{2} K_2^n \left(\frac{e^x}{a+e_x}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{n} K_n^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n \quad (20)$$

2) Für $f(y) = (a+y)^\mu$ findet sich eben so leicht

$$\frac{d^n (a+e^x)^\mu}{dx^n} = (a+e^x)^\mu \{\mu_1 K_1^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) + \mu_2 K_2^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \mu_n K_n^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\} \quad (21)$$

also z. B. für $\mu = -1$:

$$\frac{d^n (a+e^x)^{-1}}{dx^n} = \frac{-1}{a+e^x}\left\{K_1^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - K_2^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. \pm K_n^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\}, \quad (22$$

Man kann leicht noch einen anderen etwas symmetrischeren druck finden, wenn man in (20) $n+1$ für n setzt und bemerkt, s

$$\frac{d^{n+1}l(a+e^x)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}$$

. Man hat dann

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}=\frac{1}{1}K_1^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1}{2}K_2^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\frac{1}{3}K_3^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots.$$
$$\ldots.\pm\frac{1}{n+1}K_{n+1}^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (23)$$

Aus der Vergleichung von (16) und (17) folgt aber

$$\frac{1}{p}\{p^{n+1}-(p-1)^{n+1}p_1+(p-2)^{n+1}p_2-\ldots.\}$$
$$=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\ldots.,$$

. i.

$$\frac{1}{p}K_p^{n+1}=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\ldots.$$

d wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{p}K_p^{n+1}=J_p^n$$

ten:

$$J_p^n=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\ldots. \quad (24)$$

Nach Nr. (23) ist nun für die hierdurch bestimmten Werthe r Coeffizienten J:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}=J_1^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-J_2^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+J_3^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots.$$
$$\ldots.\pm J_{n+1}^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (25)$$

mt man x negativ, $a=-1$ und bemerkt, dass

$$\frac{e^{-x}}{-1+e^{-x}}=\frac{1}{-e^x+1}=-\frac{1}{e^x-1}$$

t, so erhält man

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\}=J_1^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right)+J_2^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^2+\ldots.$$
$$\ldots.+J_{n+1}^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^{n+1}. \quad (26)$$

$$(p-r)^n (p-1)_r = \frac{1}{p}(p-r)^{n+1} p_r,$$

und mithin durch Anwendung dieses Satzes für $p=0, 1, 2, \ldots$

$$A_p^{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots p}\{p^{n+1} - (p-1)^{n+1} p_1 + (p-2)^{n+1} p_2 - \ldots\} \ldots \quad (17$$

was das Nämliche ist, als wenn man in der Formel (15) $n+1$ fi n gesetzt hätte. Das dort ausgesprochene Bildungsgesetz ist den nach richtig.

Anwendungen.

Setzt man

$$K_p^n = p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \ldots \quad (18)$$

so wird

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \frac{1}{1} K_1^n e^x f'(e^x) + \frac{1}{1.2} K_2^n e^{2x} f''(e^x) + \frac{1}{1.2.3} K_3^n e^{3x} f'''(e^x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} K_n^n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \ldots \quad (19)$$

was für die Anwendung bequemer ist.

1) Für $f(y) = l(a+y)$, also $f^{(p)}(y) = \frac{1.2\ldots(p-1)}{(a+y)^p}(-1)^p$

und

$$\frac{1}{1.2\ldots p} K_p^n e^{px} f^{(p)}(e^x) = \frac{(-1)^p}{p} K_p^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p$$

erhalten wir

$$\frac{d^n l(a+e^x)}{dx^n} = \frac{1}{1} K_1^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \frac{1}{2} K_2^n \left(\frac{e^x}{a+e_x}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{n} K_n^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n \quad (20)$$

2) Für $f(y) = (a+y)^\mu$ findet sich eben so leicht

$$\frac{d^n (a+e^x)^\mu}{dx^n} = (a+e^x)^\mu \{\mu_1 K_1^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) + \mu_2 K_2^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \mu_n K_n^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\} \quad (21)$$

also z. B. für $\mu = -1$:

$$\frac{d^n (a+e^x)^{-1}}{dx^n} = \frac{-1}{a+e^x}\left\{K_1^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - K_2^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. \pm K_n^n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\}, \quad (22$$

wir bloss zu zeigen, dass dieselbe für die $(n+1)$te Ordnung gilt, wenn sie für die $n$te richtig ist. Differenziren wir zu diesem Zwecke die Gleichung (3), indem wir sie in der Form von Nr. (1) benutzen, so kommt

$$\frac{d^{n+1}f(x^\lambda)}{dx^{n+1}} = (\lambda-n)\overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n-1} f'(x^\lambda) + (2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n-1} f''(x^\lambda)$$

$$+ (3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda-n-1} f'''(x^\lambda) + \ldots.$$

$$+ \lambda\overset{n}{A}_1 x^{2\lambda-n-1} f''(x^\lambda) + \lambda\overset{n}{A}_2 x^{\lambda-n-1} f'''(x^\lambda) + \ldots.$$

$$= \frac{1}{x^{n+1}}\{(\lambda-n)\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + (2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda)$$

$$+ (3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots + \lambda\overset{n}{A}_1 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \lambda\overset{n}{A}_2 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots.\}$$

und wenn wir

$$(\lambda-n)\overset{n}{A}_1 = \overset{n+1}{A}_1,$$
$$(2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 + \lambda\overset{n}{A}_1 = \overset{n+1}{A}_2,$$
$$(3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 + \lambda\overset{n}{A}_2 = \overset{n+1}{A}_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

überhaupt

$$(p\lambda-n)\overset{n}{A}_p + \lambda\overset{n}{A}_{p-1} = \overset{n+1}{A}_p \quad (5)$$

setzen,

$$\frac{d^{n+1}f(x^\lambda)}{dx^{n+1}} = \frac{1}{x^{n+1}}\{\overset{n+1}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots\} \quad (6)$$

Vermöge der Gleichung (5) ist hier, wenn die Werthe von $\overset{n}{A}_p$ und $\overset{n}{A}_{p-1}$ nach Nr. (4) entwickelt werden,

$$\overset{n+1}{A}_p = (p\lambda-n)\frac{1.2..n}{1.2..p}\{(p\lambda)_n - (\overline{p-1}\lambda)_n p_1 + (\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots\}$$

$$+\lambda\frac{1.2...n}{1.2...(p-1)}\{(\overline{p-1}\lambda)_n - (\overline{p-2}\lambda)_n (p-1)_1 + (\overline{p-3}\lambda)_n (p-1)_2 - \ldots\}$$

oder

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1.2...n}{1.2...(p-1)}\left\{\frac{p\lambda-n}{p}(p\lambda)_n - \frac{p\lambda-n}{p}(\overline{p-1}\lambda)_n p_1\right.$$

$$\left. + \frac{p\lambda-n}{p}(\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots + \lambda(\overline{p-1}\lambda)_n - \lambda(\overline{p-2}\lambda)_n (p-1)_1 + \ldots\right\} \quad (7)$$

$$\frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1.2...(n-1)}{x^n}\left\{\frac{n_1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n_2}{1.x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n_3}{1.2.x^3} f'''\left(\frac{1}{x}\right) + ... + \frac{n_n}{1.2....(n-1)x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$(-1)^n \frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{1}{x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)n_1}{x^{2n-1}} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)n_2}{x^{2n-2}} f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + ... \quad (12)$$

Ferner findet man für $\lambda = +2$:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2.3...n}{1.2.3...p} p_{n-p} 2^{2p-n},$$

und daraus für $p = 1, 2, ... n$:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = \frac{1.2...n}{(2x)^n}\left\{\frac{1_{n-1}}{1}(2x)^2 f'(x^2) + \frac{2_{n-2}}{1.2}(2x)^4 f''(x^2) + ...\right.$$
$$\left. ... + \frac{(n-1)_1}{1.2...(n-1)}(2x)^{2n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \frac{n_0}{1.2...n}(2x)^{2n} f^{(n)}(x^2)\right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n \{f^{(n)}(x^2) + \frac{n.(n-1)_1}{(2x)^2} f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1).(n-2)_2}{(2x)^4} f^{(n-2)}(x^2) + ...$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + 2.n_2 (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ 3.4.n_4 (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + 4.5.6.n_6 (2x)^{n-6} f^{(n-3)}(x^2) + ... \quad (13)$$

wovon die in Archiv. Thl. IV. S. 364. etc. gegebenen Formeln nur spezielle Fälle sind.

II. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleichung

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + ... + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \quad (14)$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel:

$$f^{(p)}(y) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)\frac{(a+y)^\mu}{(a+y)^p};$$

olglich

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}$$

$$= \mu_p \overset{n}{E}_p \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}.$$

Bringen wir diess in der Gleichung (9) für $p=1, 2, 3, \ldots n$ in Anwendung, so ergiebt sich:

$$\frac{d^n(a+x^\lambda)^\mu}{dx^n} = \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{\mu_1\overset{n}{E}_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)+\mu_2\overset{n}{E}_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2\right.$$

$$\left.+\mu_3\overset{n}{E}_3\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^3+\ldots+\mu_n\overset{n}{E}_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\} \quad (10)$$

ein durch seine Allgemeinheit und Eleganz bemerkenswerthes Theorem.

2) Es sei

$$f(y) = e^{ay},$$

also

$$f^{(p)}(y) = a^p e^{ay}$$

und

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{a^p}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p e^{ax^\lambda},$$

so wird

$$\frac{d^n e^{ax^\lambda}}{dx^n} = \frac{e^{x^\lambda}}{x^n}\left\{\overset{n}{E}_1\frac{ax^\lambda}{1}+\overset{n}{E}_2\frac{(ax^\lambda)^2}{1.2}+\ldots+\overset{n}{E}_n\frac{(ax^\lambda)^n}{1.2\ldots.n}\right\} \quad (11)$$

Zu bemerken ist noch, dass es zwei spezielle Fälle giebt, in welchen sich die Reihe

$$(p\lambda)_n - (\overline{p-1}\lambda)_n p_1 + (\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots,$$

welche zur Bestimmung von $\overset{n}{A}_p$ oder $\overset{n}{E}_p$ dient, summiren lässt. Man findet nämlich für $\lambda=-1$:

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^n\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p}(n-1)_{p-1} = (-1)^n\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)}n_p$$

und daher nach Nr. (3)

$$\frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1.2...(n-1)}{x^n}\left\{\frac{n_1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n_2}{1.x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n_3}{1.2.x^3} f'''\left(\frac{1}{x}\right) + ... + \frac{n_n}{1.2....(n-1)x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$(-1)^n \frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{1}{x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)n_1}{x^{2n-1}} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)n_2}{x^{2n-2}} f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + ... \quad (12)$$

Ferner findet man für $\lambda = +2$:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2.3...n}{1.2.3...p} p_{n-p} 2^{2p-n},$$

und daraus für $p = 1, 2, ... n$:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = \frac{1.2...n}{(2x)^n}\left\{\frac{1_{n-1}}{1}(2x)^2 f'(x^2) + \frac{2_{n-2}}{1.2}(2x)^4 f''(x^2) + ...\right.$$
$$\left. ... + \frac{(n-1)_1}{1.2...(n-1)}(2x)^{2n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \frac{n_0}{1.2...n}(2x)^{2n} f^{(n)}(x^2)\right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n \left\{f^{(n)}(x^2) + \frac{n.(n-1)_1}{(2x)^2} f^{(n-1)}(x^2)\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1).(n-2)_2}{(2x)^4} f^{(n-2)}(x^2) + ...\right\},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + 2.n_2 (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ 3.4.n_4 (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + 4.5.6.n_6 (2x)^{n-6} f^{(n-3)}(x^2) + ... \quad (13)$$

wovon die in Archiv. Thl. IV. S. 364. etc. gegebenen Formeln nur spezielle Fälle sind.

II. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleichung

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + ... + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \quad (14)$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2...p}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - .... \pm 1^n p_{p-1}\}... \quad (15)$$

Beweis.

Differenzirt man zu Behuf des Beweises von n auf $n+1$ die Gleichung (14), so wird

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = 1\overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + 2\overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + 3\overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

$$+ \overset{n}{A}_1 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

Setzen wir dagegen

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = \overset{n+1}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n+1}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n+1}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

und vergleichen diese Coeffizienten mit den vorigen, so ist

$$\overset{n+1}{A}_1 = 1\overset{n}{A}_1,$$
$$\overset{n+1}{A}_2 = 2\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_1,$$
$$\overset{n+1}{A}_3 = 3\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_2,$$
etc.

überhaupt für ein ganzes positives p:

$$\overset{n+1}{A}_p = p\overset{n}{A}_p + \overset{n}{A}_{p-1},$$

d. h. vermöge der Werthe von $\overset{n}{A}_p$ und $\overset{n}{A}_{p-1}$:

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2...(p-1)}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + ...$$
$$+ (p-1)^n - (p-2)^n (p-1)_1 + (p-3)^n (p-1)_2 - .... \}.$$

Nimmt man je zwei unter einander stehende Glieder mit Hülfe des Satzes

$$p_r - (p-1)_{r-1} = (p-1)_r$$

zusammen, so wird

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2...(p-1)}\{p^n - (p-1)^n (p-1)_1 + (p-2)^n (p-1)_2 - ...\} \quad (16)$$

Man hat aber bekanntlich

$$(p-1)_r = \frac{p-r}{p} p_r,$$

folglich

$$(p-r)^n\,(p-1)_r=\frac{1}{p}\,(p-r)^{n+1}\,p_r,$$

und mithin durch Anwendung dieses Satzes für $p=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots$

$$A_p^{n+1}=\frac{1}{1.2\ldots\ldots p}\{p^{n+1}-(p-1)^{n+1}\,p_1+(p-2)^{n+1}\,p_2-\ldots\}\ldots\quad(17)$$

was das Nämliche ist, als wenn man in der Formel (15) $n+1$ für n gesetzt hätte. Das dort ausgesprochene Bildungsgesetz ist demnach richtig.

Anwendungen.

Setzt man

$$K_p^n=p^n-(p-1)^n\,p_1+(p-2)^n\,p_2-\ldots\ldots\quad(18)$$

so wird

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n}=\frac{1}{1}K_1^n\,e^x f'(e^x)+\frac{1}{1.2}K_2^n\,e^{2x}f''(e^x)+\frac{1}{1.2.3}K_3^n\,e^{3x}f'''(e^x)+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}K_n^n\,e^{nx}f^{(n)}(e^x)\ldots\ldots\quad(19)$$

was für die Anwendung bequemer ist.

1) Für $f(y)=l(a+y)$, also $f^{(p)}(y)=\frac{1.2\ldots(p-1)}{(a+y)^p}(-1)^p$ und

$$\frac{1}{1.2\ldots p}K_p^n\,e^{px}f^{(p)}(e^x)=\frac{(-1)^p}{p}K_p^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p$$

erhalten wir

$$\frac{d^n\,l(a+e^x)}{dx^n}=\frac{1}{1}K_1^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1}{2}K_2^n\left(\frac{e^x}{a+e_x}\right)^2+\ldots\ldots\pm\frac{1}{n}K_n^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\quad(20)$$

2) Für $f(y)=(a+y)^\mu$ findet sich eben so leicht

$$\frac{d^n(a+e^x)^\mu}{dx^n}=(a+e^x)^\mu\{\mu_1 K_1^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)+\mu_2 K_2^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots\ldots+\mu_n K_n^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\}\quad(21)$$

also z. B. für $\mu=-1$:

$$\frac{d^n(a+e^x)^{-1}}{dx^n}=\frac{-1}{a+e^x}\left\{K_1^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-K_2^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots\ldots\pm K_n^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\},\quad(22)$$

Man kann leicht noch einen anderen etwas symmetrischeren ausdruck finden, wenn man in (20) $n+1$ für n setzt und bemerkt, ass

$$\frac{d^{n+1}l(a+e^x)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}$$

t. Man hat dann

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}=\frac{1}{1}K_1^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1}{2}K_2^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\frac{1}{3}K_3^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots.$$
$$\ldots.\pm\frac{1}{n+1}K_{n+1}^{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (23)$$

Aus der Vergleichung von (16) und (17) folgt aber

$$\frac{1}{p}\{p^{n+1}-(p-1)^{n+1}p_1+(p-2)^{n+1}p_2-\ldots.\}$$
$$=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\ldots.,$$

d. i.

$$\frac{1}{p}K_p^{n+1}=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\ldots.$$

nd wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{p}K_p^{n+1}=J_p^n$$

setzen:

$$J_p^n=p^n-(p-1)^n(p-1)_1+(p-2)^n(p-1)_2-\ldots. \quad (24)$$

Nach Nr. (23) ist nun für die hierdurch bestimmten Werthe der Coeffizienten J:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}=J_1^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-J_2^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+J_3^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots.$$
$$\ldots.\pm J_{n+1}^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (25)$$

Nimmt man x negativ, $a=-1$ und bemerkt, dass

$$\frac{e^{-x}}{-1+e^{-x}}=\frac{1}{-e^x+1}=-\frac{1}{e^x-1}$$

ist, so erhält man

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\}=J_1^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right)+J_2^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^2+\ldots.$$
$$\ldots.+J_{n+1}^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^{n+1}. \quad (26)$$

Die Gleichungen (25) und (26) stimmen mit den Resultaten d
Herrn Malmsten *) überein, wenn man statt

$$n,\ p,\ \overset{n}{J}_p$$

setzt:

$$i,\ k,\ \overset{(i,k)}{a},$$

erscheinen hier aber nur als spezielle Fälle der allgemeineren F
mel (14). Man kann ebenso leicht die von Laplace und Eul
entwickelten Formeln aus denselben ableiten. Für die weite
Ausführung dieses Gegenstandes verweise ich auf mein bald
scheinendes Handbuch der Differenzial- und Integral-Rechnung.

XXII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn ein Kreis und eine Ellipse, deren Gleichungen

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \text{ und } \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

sind, sich in vier Punkten schneiden, so ist das Product der E
fernungen der vier Durchschnittspunkte von der Hauptaxe
Ellipse jederzeit eine constante Grösse, nämlich der Grösse

$$\frac{b^4\{(a^2+\alpha^2+\beta^2-r^2)^2-4a^2\alpha^2\}}{(a^2-b^2)^2}$$

gleich.

Die Gleichung einer Parabel zu finden, wenn zwei berühren
Linien derselben als Coordinatenaxen angenommen werden.

Wenn von einem ausserhalb eines Kreises liegenden Punk
P zwei Tangenten PA, PB an den Kreis, und eine dritte, d
gegen den Punkt P concaven Bogen AB in C schneidende gera

*) Archiv. Theil VI. S. 45. und Theil III. S. 41.

Linie PC gezogen sind, so schneiden sich jederzeit die durch C an den Kreis gezogene Tangente, das auf die Linie PC durch ihre Mitte errichtete Perpendikel und die durch die Mittelpunkte der beiden Tangenten PA, PB gezogene gerade Linie in einem und demselben Punkte.

Wenn man eine Reihe Gleichungen von folgender Form hat:

$$a = a,$$
$$a + x = aa_1,$$
$$a + 2x = aa_1^2 a_2,$$
$$a + 3x = aa_1^3 a_2^2 a_3,$$
$$a + 4x = aa_1^4 a_2^3 a_3^2 a_4,$$
u. s. w.

einen allgemeinen independenten Ausdruck der Grösse a_{n+1} zu finden, und überhaupt eine weitere Untersuchung der Reihe

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots . a_{n+1}, \ldots .$$

anzustellen.

Die Summe der Quadrate der Cosecanten der drei von den Spitzen eines sphärischen Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten desselben gefällten Perpendikel ist der Summe der Quadrate der Cosecanten der Halbmesser der vier Kreise gleich, welche die drei Seiten des Dreiecks (oder deren Verlängerungen) berühren.

Man soll durch gewöhnliche Buchstabenrechnung beweisen, dass

$$\begin{aligned}(p^2 + Aq^2 + Br^2 + ABs^2)(p_1^2 + Aq_1^2 + Br_1^2 + ABs_1^2) \\ = (pp_1 - Aqq_1 \mp Brr_1 \pm ABss_1)^2 \\ + A(pq_1 + qp_1 \mp Brs_1 \mp Bsr_1)^2 \\ + B(pr_1 + Aqs_1 \pm rp_1 \pm Asq_1)^2 \\ + AB(ps_1 - qr_1 \pm rq_1 \mp sp_1)^2\end{aligned}$$

ist, dass also das Product zweier Grössen von der Form

$$p^2 + Aq^2 + Br^2 + ABs^2,$$

wo A und B constante Grössen bezeichnen, immer wieder eine Grösse von derselben Form ist. Für $A = 1$ und $B = 1$ ist

le point où la normale touche l'hyperbole est sur la même ordonnée que le point où le rayon vecteur rencontre l'hyperbole. — Cela posé, les rayons vecteurs menés aux extrémités d'un arc de la lemniscate étant prolongés comprennent un arc de l'hyperbole, et les normales aux deux rayons vecteurs touchent l'hyperbole en deux points qui déterminent un deuxième arc égal au premier. Chacun de ces deux arcs peut être considéré comme le correspondant de l'arc de la lemniscate. Il y a entre les arcs de la lemniscate et leurs correspondants sur l'hyperbole cette relation que donne un calcul très simple: à deux arcs égaux de la lemniscate correspondent sur l'hyperbole deux arcs dont la différence est rectifiable.

C'est par suite de ce théorème que les propriétés des arcs de l'hyperbole dont la différence est rectifiable donnent lieu à des propriétés des arcs égaux de la lemniscate. Voici ces propriétés.

Quand deux arcs d'une lemniscate sont égaux, les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de ces arcs forment un quadrilatère circonscriptible au cercle. — Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux entre eux, si par les extrémités de chacun de ces arcs on mène les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent à ces points, et qu'on prenne le point de concours de ces normales, tous ces points de concours seront sur une hyperbole décrite des mêmes foyers que l'hyperbole équilatère qui a servi à former la lemniscate.

Ce théorème fournit une construction très simple pour déterminer sur la lemniscate des arcs égaux à un arc donné, et par conséquent des arcs multiples.

Si à partir d'un point de la lemniscate, on prend, de part et d'autre, deux arcs égaux entre eux, mais d'une largeur quelconque, et que par les extrémités de ces deux arcs on mène les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent en ces points, le lieu géométrique du point de concours de ces deux normales sera une ellipse décrite des mêmes foyers que l'hyperbole équilatère correspondante à la lemniscate.

Par chaque point d'une lemniscate on peut mener un cercle tangent à la courbe en ce point et passant par le centre de la courbe. Ces cercles donnent lieu à quelques propriétés. — Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux, si par les extrémités de chacun d'eux on mène les deux cercles tangents à la courbe en ces points respectivement et passant par le centre, le point d'intersection de ces deux cercles aura pour lieu géométrique une espèce de lemniscate qui sera le lieu des pieds des normales abaissées du centre de la courbe sur une hyperbole non équilatère. — Étant pris sur une lemniscate deux arcs égaux, si par leurs extrémités on mène quatre cercles tangents à la courbe en ces points respectivement et passant tous quatre par le centre de la courbe, ces quatres cercles seront tangents à un même cercle.

In dem Journal des savants. Mars 1845. befindet sich ein Aufsatz von V. Cousin über Roberval, bekanntlich einen der ausgezeichnetsten Mathematiker des 17ten Jahrhunderts, aus welchem ich folgende Stelle entlehne, die wohl in einer vorzüg-

lich der Beförderung des mathematischen Unterrichts gewidmeten Zeitschrift zweckmässig einen Platz finden dürfte. Ausserdem enthält der Aufsatz noch manches andere Interessante, jedoch mehr in philosophischer, als in mathematischer Rücksicht.

Roberval, qui avait toute sa vie professé les mathématiques, avait employé ses dernières années de rédiger ses cours sous le noms d'Éléments de géométrie. Nous n'avons point à nous occuper de cet ouvrage, qui n'a jamais été publié et dont le manuscript subsiste. Après la mort de Roberval, en 1675, Lahire, dépositaire de ses papiers et de ses dernières volontés, revit le travail de son ami, et y mit une préface où il nous apprend quel avait été le dessein de Roberval dans la composition de ces Éléments. Cette préface de Lahire, ainsi que l'avant-propos, écrit tout entier de la main de Roberval, sont vraiment deux pièces intéressantes et qui ne sont point étrangères à la philosophie. Le but de Roberval avait été de ramener la géométrie au plus petit nombre possible de principes ou de définitions, de donner des démonstrations de tout ce qui peut être démontré, même des propositions qu'on a coutume de considérer comme indémonstrables. Leibnitz aussi s'est plaint souvent qu'on n'ait pas été assez loin dans l'analyse des principes, et il n'a cessé d'appeler l'attention des géomètres philosophes sur la nécessité de laisser le moins d'hypothèses possible dans les fondements des sciences mathématiques. Roberval, avant Leibnitz, eut la même pensée et se proposa de donner à ses Éléments de géométrie un caractère particulier de rigueur et d'évidence philosophique. Il s'attacha plus à la solidité qu'a l'élégance, et travailla surtout pour les esprits difficiles. „M. de Roberval, dit Lahire, ayant fait profession dès sa jeunesse, d'enseigner les mathématiques en public et en particulier, et ayant continué ces exercices pendant plusieurs années et jusqu'au temps d'une vieillesse fort avancée, l'on peut dire que jamais homme n'a eu plus de moyens de connoitre et la différence des génies qui s'appliquent à cette science, et quelles sont les méthodes les plus universelles et les plus assurées dont on peut se servir avec succès. C'est à ce propos qu'il nous a dit que, parmi cette infinité de différents esprits qu'il avoit enseignés, il en avoit remarqué particulièrement de deux sortes qui lui avoient donné beaucoup de peine; dont la première étoit de ceux qui admettent les propositions avec trop de facilité, et qui, sans beaucoup s'arrêter à examiner si les démonstrations que l'on leur en fait sont légitimes en toutes leurs parties, passent outre, et prétendent par ce moyen de s'avancer; l'autre, au contraire, étoit de certains esprits pointilleux et opiniâtres, qui s'arretent partout et trouvent des difficultés sur l'explication des théorèmes que l'on démontre, et même sur celle des premiers principes qui ne se démontrent pas; et qu'ensuite, après une observation de plusieurs années, faite avec beaucoup d'application sur les succès de ces deux espèces d'esprits, il disoit que les premiers réussissoient rarement dans l'étude de la mathématique, la plus-part s'en dégoûtant aisément avant que d'arriver à la méditation des connoissances plus élevées, et que ceux même qui continuoient de s'y appliquer devenoient le plus souvent chimériques et visionnaires dans leurs inventions, faisant à touts coups des paralogismes dans leurs raisonnements, et ne pouvant discerner la fausseté

de ceux qu'ils trouvoient dans les ouvrages des auteurs. Il ajoutoit que la plus grande partie de ceux qui ont prétendu avoir trouvé la quadrature du cercle, le mouvement perpétuel et la résolution des autres problèmes de cette nature, étoient des esprits de cette première espèce. Il mettoit, au contraire, dans la seconde la pluspart de ces grands génies qui ont produit de si belles choses dans les mathématiques, parce, disoit-il, que cette humeur, qui paroît dans les commencements trop scrupuleuse et importune, venant à se meurir avec le temps et avec le jugement, se change pour l'ordinaire en ce soin et cette application studieuse qu'il faut avoir pour bien examiner les raisonnements, pour bien connoître la nécessité de la conclusion dans les prémisses, et pour ne se point laisser éblouir au brillant de l'apparence spécieuse d'un paralogisme. C'est donc pour cette sorte d'esprits qu'il a prétendu composer cet ouvrage, dans lequel il a tasché de s'expliquer d'une manière à ne laisser aucun doute, à applanir tout ce qui peut faire naître des scrupules dans l'esprit de ceux qui commencent, à fuir les expressions qui, pouvant avoir divers sens, deviennent obscures et équivoques, à faire le moins de suppositions qu'il luy a été possible, et à démontrer universellement tout ce qui peut être démontré, posant pour un principe inébranlable en mathématiques que rien n'y doit passer pour vrai qui ne soit démontré, s'il le peut être."

In den Blättern für literarische Unterhaltung. 1845. Nr. 71, Nr. 72 und Nr. 73 finden sich in einem interessanten Aufsatze über Claudine von Tencin *) folgende d'Alembert betreffende Stellen:

„Viele Biographen der berühmten Frau haben dem Gedächtnisse derselben einen unvertilgbaren Makel durch die Behauptung anzuhängen gesucht, dass dieselbe den schuldlosen Zeugen ihres Verhältnisses mit Destouches" (Chevalier und Provinzial-Commissair der Artillerie) „auf der Treppe der Kirche St. Jean le Rond seinem Schicksale preisgegeben; mit allen Zeichen der

---

*) War im Jahre 1681 zu Grenoble geboren, ward Nonne im Kloster Montfleuri bei Grenoble, in welchem jetzt die Congregation der Damen von St. Pierre einer Erziehung junger Mädchen vom Stande vorsteht, später Chanoinesse der Abtei Neuville bei Lyon, ward später mit Bewilligung des Pabstes ihres Gelübdes entbunden, lebte dann unter dem ihr von den Parisern beigelegten Namen: „la jolie chanoinesse" in Paris und starb als Marquise v. Tencin am 4ten December 1749 an der Brustwassersucht, nachdem sie an den, nicht auf ihren Wunsch, sondern von ihrer Familie entsendet, mit den Tröstungen der Religion an ihrem Bette erschienenen Priester die folgenden Worte als ihre letzten gerichtet hatte: „Mein Vater, ich bin jung und hübsch gewesen; es ist mir oft gesagt worden, und ich habe die Schwäche gehabt, es stets zu glauben; nun richten Sie und versagen Sie mir Ihren Segen nicht! — Dies war die Mutter d'Alemberts.

XXIV.

Zur sphärischen Trigonometrie.

Von

Herrn J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Dr. Anton Müller hat in seinem Buche „Die allgemeinsten Gesetze der sphärischen Polygonometrie und die allgemeinsten Gleichungen der gauchen Polygone. Heidelberg bei Groos. 1836“ zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks 19 Gleichungen aufgestellt. Wir wollen im Folgenden diese Gleichungen auf einem dem dort betretenen ähnlichen Wege ableiten und dann zeigen, dass eigentlich nur sieben Gleichungen bestehen und die übrigen 12 aus ihnen abgeleitet sind.

Wir suchen im Folgenden die Relationen, die zwischen den ebenen und den Flächenwinkeln einer dreiseitigen körperlichen Ecke bestehen, da von einer solchen aus leicht auf ein sphärisches Dreieck geschlossen werden kann.

§. 1.

Es sei $PA_1A_2A_3$ (Taf. III. Fig. 1.) eine dreiseitige körperliche Ecke; man nenne die Winkel $A_1PA_2=a_1$, $A_2PA_3=a_2$, $A_3PA_1=a_3$; bezeichne ferner den Neigungswinkel von A_1PA_2 und A_2PA_3 durch $\widehat{a_1a_2}$, den von A_2PA_3 und A_3PA_1 durch $\widehat{a_2a_3}$, ad den der Ebenen A_3PA_1 und A_1PA_2 durch $\widehat{a_3a_1}$. Man nehme im Innern der Ecke willkührlich einen Punkt O an und fälle von ihm aus Senkrechte auf die Ebenen der Ecke; OO_1 senkrecht auf A_1PA_2; OO_2 senkrecht auf A_2PA_3; OO_3 senkrecht auf

tionen und Variationen". Was man unter diesen Variationen zu verstehen habe, ist jedem Leser dieses Aufsatzes bekannt. Der Name Variation kommt aber auch in der höheren Analysis vor. Die beiderlei Variationen haben aber nicht das Allergeringste mit einander gemeinschaftlich. Zuweilen findet man, dass man den in die Algebra gehörigen Variationen noch ein Eigenschaftswort beifügt, und sie kombinatorische Variationen nennt; dagegen die in die höhere Analysis gehörigen Variationen hat man ganz ohne Eigenschaftswort gelassen.

Zweitens. Die Aenderungen, welche eine Funktion erleiden kann, sind von zweierlei Art; denn entweder kann man den in der Funktion enthaltenen veränderlichen Grössen Werthänderungen beilegen, das ursprüngliche Wesen der Funktion selbst aber ungestört lassen, oder man kann irgend eine Funktion in eine ganz andere Funktion übergehen lassen.

A) Aenderungen der ersten Art. Es sei

$$\text{I)}\quad y=\varphi x$$

gegeben, wo x jeden beliebigen Werth annehmen kann, und x gehe über in $(x+h)$; so bekommt man

$$\text{II)}\quad y+Dy=\varphi(x+h),$$

und man sagt hier: y ist eine Funktion mit einer variabel (veränderlichen) Grösse. Man sagt noch ferner:

a) Die Grösse x, welcher man jede beliebige Werthänderung $(x+h)$ beilegen kann, ist die unabhängige Variabl oder auch die absolut unabhängige Variable.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von de Werthänderung $(x+h)$, ist die abhängige Variable.

Es sei ferner

$$\text{III)}\quad y=\varphi(x,w)$$

gegeben, wo sowohl x als auch w jeden beliebigen Werth annehmen kann, und x und w gehen bezüglich über in $(x+h)$ und $(w+k)$; so bekommt man

$$\text{IV)}\quad y+Dy=\varphi[(x+h),(w+k)],$$

und hier sagt man: y ist eine Funktion mit zwei variabeln (veränderlichen) Grössen. Man sagt noch ferner:

a) Die beiden Grössen x und w, welchen man jede beliebige Werthänderung $(x+h)$ und $(w+k)$ beilegen kann, sind die unabhängigen Variabeln oder auch die absolut unabhängigen Variabeln.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von den Werthänderungen $(x+h)$ und $(w+k)$, ist die abhängige Variable.

Es sei ferner

$$\text{V)}\quad y=\varphi(x,w)$$

gegeben, während noch gleichzeitig

$$\text{VI)}\quad w=fx$$

bestehen soll; so kann hier nur x jeden beliebigen Werth annehmen, dagegen der Werth des w ist abhängig vom Werthe des x, weil Gleichung VI) stattfindet. Wenn nun x in $(x+h)$ übergeht, so geht Gleichung VI) über in

$$\text{VII)}\quad w+k=f(x+h),$$

durch welche Gleichung vorgeschrieben ist, wie die Werthänderung $(w+k)$ abhängig ist von der Werthänderung $(x+h)$. Gleichung V) geht über in

$$\text{VIII)}\quad y+Dy=\varphi[(x+h),\ (w+k)]$$

und hier sagt man:

a) Die Grösse y ist die abhängige Variable.
b) Die Grösse x ist die absolut unabhängige Variable.
c) Die Grösse w ist die relativ unabhängige Variable, eben weil sie wohl von y unabhängig ist, während sie von x abhängt.

Es ist unnöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Diejenigen Zweige der höheren Analysis, welche, wenn die in einer Funktion befindlichen Variablen eine Werthänderung erleiden, die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersuchen und anwenden lehren, sind der Differenzenkalkul und der Differentialkalkul.

B) Aenderungen der zweiten Art. Es sei

$$\text{IX)}\quad y=\varphi x,$$

und diese Funktion gehe über in

$$\text{X)}\quad y+\Delta y=\psi x.$$

Hier ist

$$\text{XI)}\quad \Delta y=\psi x-\varphi x$$

und den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $(\psi x-\varphi x)$ pflegt man Variation (besser aber Gesammtvariation) zu nennen.

Es sei ferner

$$\text{XII)}\quad y=\varphi(x,w)$$

und zugleich sei

$$\text{XIII)}\quad w=fx,$$

so dass Gleichung XII) gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XIV)}\quad y=\varphi(x,fx).$$

Wenn nun $w=fx$ übergeht in

$$\text{XV)}\quad w+\Delta w=Fx,$$

so geht dabei die Gleichung XII) oder XIV) über in

$$\text{XVI)}\quad y+\Delta y=\varphi(x,Fx).$$

Den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $[\varphi(x,Fx)-\varphi(x,fx)]$ nennt man auch hier Variation (besser aber Gesammtvariation).

Es ist nicht nöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Derjenige Zweig der höheren Analy-

tionen und Variationen". Was man unter diesen Variation zu verstehen habe, ist jedem Leser dieses Aufsatzes bekan Der Name Variation kommt aber auch in der höheren Analys vor. Die beiderlei Variationen haben aber nicht das Allergering mit einander gemeinschaftlich. Zuweilen findet man, dass man d in die Algebra gehörigen Variationen noch ein Eigenschaftsw beifügt, und sie kombinatorische Variationen nennt; d gegen die in die höhere Analysis gehörigen Variationen hat m ganz ohne Eigenschaftswort gelassen.

Zweitens. Die Aenderungen, welche eine Funktion erl den kann, sind von zweierlei Art; denn entweder kann man d in der Funktion enthaltenen veränderlichen Grössen Werthänd rungen beilegen, das ursprüngliche Wesen der Funktion selb aber ungestört lassen, oder man kann irgend eine Funktion in ei ganz andere Funktion übergehen lassen.

A) Aenderungen der ersten Art. Es sei

$$\text{I)} \quad y = \varphi x$$

gegeben, wo x jeden beliebigen Werth annehmen kann, und gehe über in $(x+h)$; so bekommt man

$$\text{II)} \quad y + Dy = \varphi(x+h),$$

und man sagt hier: y ist eine Funktion mit einer variabe (veränderlichen) Grösse. Man sagt noch ferner:

a) Die Grösse x, welcher man jede beliebige Werthänderu $(x+h)$ beilegen kann, ist die unabhängige Variab oder auch die absolut unabhängige Variable.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von Werthänderung $(x+h)$, ist die abhängige Variable

Es sei ferner

$$\text{III)} \quad y = \varphi(x, w)$$

gegeben, wo sowohl x als auch w jeden beliebigen Werth ann men kann, und x und w gehen bezüglich über in $(x+h)$ u $(w+k)$; so bekommt man

$$\text{IV)} \quad y + Dy = \varphi[(x+h), (w+k)],$$

und hier sagt man: y ist eine Funktion mit zwei variabeln (v änderlichen) Grössen. Man sagt noch ferner:

a) Die beiden Grössen x und w, welchen man jede beliebi Werthänderung $(x+h)$ und $(w+k)$ beilegen kann, sind unabhängigen Variabeln oder auch die absolut u abhängigen Variabeln.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von d Werthänderungen $(x+h)$ und $(w+k)$, ist die abhängi Variable.

Es sei ferner

$$\text{V)} \quad y = \varphi(x, w)$$

gegeben, während noch gleichzeitig

$$\text{VI)} \quad w = fx$$

bestehen soll; so kann hier nur x jeden beliebigen Werth annehmen, dagegen der Werth des w ist abhängig vom Werthe des x, weil Gleichung VI) stattfindet. Wenn nun x in $(x+h)$ übergeht, so geht Gleichung VI) über in

$$\text{VII)} \quad w+k=f(x+h),$$

durch welche Gleichung vorgeschrieben ist, wie die Werthänderung $(w+k)$ abhängig ist von der Werthänderung $(x+h)$. Gleichung V) geht über in

$$\text{VIII)} \quad y+Dy=\varphi[(x+h),\,(w+k)]$$

und hier sagt man:

a) Die Grösse y ist die abhängige Variable.
b) Die Grösse x ist die absolut unabhängige Variable.
c) Die Grösse w ist die relativ unabhängige Variable, eben weil sie wohl von y unabhängig ist, während sie von x abhängt.

Es ist unnöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Diejenigen Zweige der höheren Analysis, welche, wenn die in einer Funktion befindlichen Variablen eine Werthänderung erleiden, die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersuchen und anwenden lehren, sind der Differenzenkalkul und der Differentialkalkul.

B) Aenderungen der zweiten Art. Es sei

$$\text{IX)} \quad y=\varphi x,$$

und diese Funktion gehe über in

$$\text{X)} \quad y+\Delta y=\psi x.$$

Hier ist

$$\text{XI)} \quad \Delta y=\psi x-\varphi x$$

und den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $(\psi x-\varphi x)$ pflegt man Variation (besser aber Gesammtvariation) zu nennen.

Es sei ferner

$$\text{XII)} \quad y=\varphi(x,w)$$

und zugleich sei

$$\text{XIII)} \quad w=fx,$$

so dass Gleichung XII) gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XIV)} \quad y=\varphi(x,fx).$$

Wenn nun $w=fx$ übergeht in

$$\text{XV)} \quad w+\Delta w=Fx,$$

so geht dabei die Gleichung XII) oder XIV) über in

$$\text{XVI)} \quad y+\Delta y=\varphi(x,Fx).$$

Den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $[\varphi(x,Fx)-\varphi(x,fx)]$ nennt man auch hier Variation (besser aber Gesammtvariation).

Es ist nicht nöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Derjenige Zweig der höheren Analy-

sis, welcher, wenn eine Funktion in eine ganz andere Funktion übergeht, die daraus folgenden Ergebnisse untersucht und anwenden lehrt, wird Variationskalkul genannt.

Drittens. Ist es nun gleichgiltig, dass das Wort „Variation" schon in der Algebra und dann wieder im höchsten Zweige der Analysis vorkommt, und so zur Benennung von zweierlei Dingen gebraucht wird, die nicht das Allergeringste mit einander gemeinschaftlich haben?

Wenn man das in Gleichung III) vorkommende w, welchem man die ganz willkürliche Werthänderung $(w+k)$ beilegen kann, eine variable Grösse nennt; ist es dann gut, dass man auch das in Gleichung XII) vorkommende $w=fx$, welches in Fx übergeht, ebenfalls eine variable Grösse nennt?

So gewiss es höchst fatal ist, wenn in einer und derselben Wissenschaft durch ein einziges Wort zwei ganz verschiedene Begriffe bezeichnet werden; so gewiss ist es nöthig, dass hier abgeholfen werde. Wo aber abzuhelfen sei, darüber kann kein Bedenken stattfinden.

Ein Begriff, welcher schon einem früheren Zweige einer Wissenschaft angehört, kommt auch in den späteren Zweigen vor; dagegen ein Begriff, welcher erst einem späteren Zweige angehört, kommt in den früheren Zweigen nicht vor. Der terminus technicus, wodurch ein einem früheren Zweige der Wissenschaft angehörender Begriff ausgedrückt wird, kommt also auch in den späteren Zweigen vor; dagegen der terminus technicus, wodurch ein einem späteren Zweige einer Wissenschaft angehörender Begriff ausgedrückt wird, kommt in den früheren Zweigen nicht vor.

Ausserdem ist es Thatsache, dass es viele Lehrbücher über Differential- und Integral-Kalkul giebt, in denen keine Spur des sogenannten Variations-Kalkuls vorkommt.

Man thut also am besten, dem höheren Zweige der Analysis, dem sogenannten Variationskalkul, einen anderen Namen zu geben, der so gewählt ist, dass sich für die daselbst vorkommenden Wörter „Variation" und „variabel" die entsprechenden Namen von selbst ergeben; denn

1) Dadurch wird in die früheren Zweige der Mathematik nicht die geringste Störung gebracht; und auch

2) Diejenigen Lehrbücher über Differential- und Integral-Kalkul, welche nichts von dem sogenannten Variations-Kalkul enthalten, werden von dieser Namensänderung nicht im Geringsten berührt.

Nachdem nun die Zweckmässigkeit und beziehungsweise die Nothwendigkeit, dem sogenannten Variationskalkul einen anderen Namen zu geben, dargethan ist, fragt sich: welches Wort soll man wählen?

Es wäre dringend nöthig, ein Wort vorzuschlagen. Dieses müsste aus der Lateinischen Sprache entnommen sein, damit, wenn dessen Zweckmässigkeit von anderen Nationen anerkannt wird, sie es bequem auch in ihre Sprache aufnehmen können. Ich habe zwar schon selbst ein Wort gewählt, bin aber bereit, ein zweckmässigeres, wenn eins vorgeschlagen wird, sogleich anzunehmen.

XXIV.

Zur sphärischen Trigonometrie.

Von

Herrn J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Dr. Anton Müller hat in seinem Buche „Die allgemeinsten Gesetze der sphärischen Polygonometrie und die allgemeinsten Gleichungen der gauchen Polygone. Heidelberg bei Groos. 1836“ zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks 19 Gleichungen aufgestellt. Wir wollen im Folgenden diese Gleichungen auf einem dem dort betretenen ähnlichen Wege ableiten und dann zeigen, dass eigentlich nur sieben Gleichungen bestehen und die übrigen 12 aus ihnen abgeleitet sind.

Wir suchen im Folgenden die Relationen, die zwischen den ebenen und den Flächenwinkeln einer dreiseitigen körperlichen Ecke bestehen, da von einer solchen aus leicht auf ein sphärisches Dreieck geschlossen werden kann.

§. 1.

Es sei $PA_1A_2A_3$ (Taf. III. Fig. 1.) eine dreiseitige körperliche Ecke; man nenne die Winkel $A_1PA_2=a_1$, $A_2PA_3=a_2$, $A_3PA_1=a_3$; bezeichne ferner den Neigungswinkel von A_1PA_2 und A_2PA_3 durch $\widehat{a_1a_2}$, den von A_2PA_3 und A_3PA_1 durch $\widehat{a_2a_3}$, den der Ebenen A_3PA_1 und A_1PA_2 durch $\widehat{a_3a_1}$. Man nehme Innern der Ecke willkührlich einen Punkt O an und fälle von a aus Senkrechte auf die Ebenen der Ecke; OO_1 senkrecht A_1PA_2; OO_2 senkrecht auf A_2PA_3; OO_3 senkrecht auf

A_3PA_1. Man lege durch OO_1 und OO_2 eine Ebene, welche die Kante PA_2 in A_2 schneidet, so steht PA_2 senkrecht auf dieser Ebene; dessgleichen steht PA_1 senkrecht auf der durch OO_1 und OO_3; PA_3 auf der durch OO_2 und OO_3 gelegten Ebene. Diese drei Ebenen bilden abermals eine Pyramide. Ihre Linienwinkel sind $O_1OO_2 = 180 - \widehat{a_1a_2}$, $O_2OO_3 = 180 - \widehat{a_2a_3}$, $O_3OO_1 = 180 - \widehat{a_3a_1}$; ihre Neigungswinkel sind $A_1O_1A_2 = 180 - a_1$, $A_2O_2A_3 = 180 - a_2$, $A_3O_3A_1 = 180 - a_3$.

§. 2.

Da in dem Vierecke $PA_1O_1A_2$: $O_1A_1P = 90$, $O_1A_2P = 90$, $A_2PA_1 = a_1$, $A_1O_1A_2 = 180 - a_1$, so findet man:

$$\begin{aligned} PA_1 &= PA_2 \cos a_1 + A_2O_1 \sin a_1, \\ A_1O_1 &= PA_2 \sin a_1 - A_2O_1 \cos a_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Dessgleichen

$$\begin{aligned} PA_2 &= PA_3 \cos a_2 + A_3O_2 \sin a_2, \\ A_2O_2 &= PA_3 \sin a_2 - A_3O_2 \cos a_2 \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} PA_3 &= PA_1 \cos a_3 + A_1O_3 \sin a_3, \\ A_3O_3 &= PA_1 \sin a_3 - A_1O_3 \cos a_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formeln auch gelten, wenn die Winkel a_1, a_2, a_3 stumpf sind; nur muss man die Linien PA_1, PA_2, PA_3, im Falle sie auf die andere Seite von P fallen, als hier angenommen ist, als negativ betrachten.

Eben so findet man aus dem Vierecke $A_2O_1OO_2$, da $OO_1A_2 = OO_2A_2 = 90$, $O_1A_2O_2 = \widehat{a_1a_2}$, $O_1OO_2 = 180 - \widehat{a_1a_2}$:

$$\begin{aligned} A_2O_1 &= A_2O_2 \cos \widehat{a_1a_2} + OO_2 \sin \widehat{a_1a_2}, \\ OO_1 &= A_2O_2 \sin \widehat{a_1a_2} - OO_2 \cos \widehat{a_1a_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dessgleichen

$$\begin{aligned} A_3O_2 &= A_3O_3 \cos \widehat{a_2a_3} + OO_3 \sin \widehat{a_2a_3}, \\ OO_2 &= A_3O_3 \sin \widehat{a_2a_3} - OO_3 \cos \widehat{a_2a_3} \end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} A_1O_3 &= A_1O_1 \cos \widehat{a_3a_1} + OO_1 \sin \widehat{a_3a_1}, \\ OO_3 &= A_1O_1 \sin \widehat{a_3a_1} - OO_1 \cos \widehat{a_3a_1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Auch diese Formeln gelten allgemein; nur müssten Linien, die auf entgegengesetzte Weise fallen, als hier angenommen, als negativ betrachtet werden.

$$\left.\begin{aligned}
&-\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3\widehat{a_1}\sin a_1 - \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\sin a_2\widehat{a_3}\sin a_3\widehat{a_1}\sin a_1\\
&\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_1 + \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_2\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_1\\
&\sin a_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_1 + \sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\sin a_3\cos a_1\\
&\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_2\sin a_3\cos a_1 + \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\cos a_3\cos a_1.
\end{aligned}\right\} \text{(XII)}$$

$$-\cos a_3\widehat{a_1} = \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3} - \cos a_2 \sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}. \qquad \text{(XIII)}$$

$$a_3\widehat{a_1} = \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3 + \cos a_2\widehat{a_3}\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\cos a_3 + \sin a_2\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_3. \qquad \text{(XIV)}$$

$$\cos a_3\sin a_3 a_1 = \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3} + \cos a_2\widehat{a_3}\cos a_2\sin a_1\widehat{a_2}. \qquad \text{(XV)}$$

§. 8.

Setzt man in die Gleichungen des §. 6. die Werthe, wie sie zu Eingang des §. 7. angegeben wurden, so findet man:
Aus (18):

$$A_1O_1 = OO_3 \sin a_3\widehat{a_1} + A_1O_3 \cos a_3\widehat{a_1}.$$

Setzt man diesen Werth von A_1O_1 dem in (11′) gleich, so findet man die Gleichungen (III) und (XIV) und

$$\left.\begin{aligned}
a_3\widehat{a_1} = &\sin a_1\cos a_2\sin a_3 - \cos a_1\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\sin a_3 - \sin a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3\\
&-\cos a_1\cos a_2\cos a_3\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3 + \sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3.
\end{aligned}\right\} \text{(XVI)}$$

Aus (19):

$$A_1O_1 = OO_3 \sin a_3\widehat{a_1} - A_3O_3 \cos a_3\cos a_3\widehat{a_1} + PA_3 \sin a_3\cos a_3\widehat{a_1}.$$

Diess dem Werthe von A_1O_1 in (9) gleich gesetzt, giebt (VIII), (XIV) und

$$-\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1} = \sin a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3} + \cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3} - \sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1\sin a_2\widehat{a_3}. \qquad \text{(XVII)}$$

Aus (20) folgt ein Werth von A_1O_1, der, dem in (8) gleichgesetzt, führt zu den Gleichungen (VIII), (XV) und

$$\sin a_3\widehat{a_1}\sin a_2\widehat{a_3} - \cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\cos a_2\widehat{a_3} = \sin a_1\sin a_2 + \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_1\cos a_2. \qquad \text{(XVIII)}$$

Aus (21) folgt ebenfalls ein Werth von A_1O_1, der, verglichen mit dem in (7), zu den Gleichungen (VII), (XVII), (XV) führt.
Endlich ergiebt sich aus (22) ein Werth von A_1O_1, der verglichen mit dem in (1) zu (VII), (XI) führt und zu

$$\left.\begin{aligned}
\cos a_1 = &\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3\widehat{a_1} + \sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\\
&+\sin a_1\widehat{a_3}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2} - \cos a_3\widehat{a_1}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\\
&-\sin a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_2\cos a_1\widehat{a_2}.
\end{aligned}\right\} \text{(XIX)}$$

Hiermit ist die Reihe der Untersuchungen geschlossen und als Resultat haben wir 19 Beziehungen erhalten; diese gelten eben so gut für ein sphärisches Dreieck, als für die körperliche Ecke.

§. 9.

Bezeichnet man die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks (in Graden) mit a, b, c; die drei gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C, so hat man statt

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1 a_2},\ \widehat{a_2 a_3},\ \widehat{a_3 a_1}$$

zu setzen

$$a,\ b,\ c,\ C,\ A,\ B;$$

und man erhält somit folgende 19 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 1 = &\sin a\cos b\sin c\cos B - \cos a\cos C\sin b\cos B\sin c \\ &-\sin a\sin b\cos A\cos c\cos B - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c\cos B \\ &+\sin C\cos a\sin A\cos c\cos B + \sin a\sin b\sin A\sin B \\ &+\cos a\cos b\cos C\sin A\sin B + \cos a\sin C\cos A\sin B. \end{aligned}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = &-\sin C\cos A\sin B\sin a - \cos C\cos b\sin A\sin B\sin a \\ &-\sin C\sin A\cos c\cos B\sin a + \cos C\cos A\cos b\cos c\cos B\sin a \\ &+\sin b\cos C\sin c\cos B\sin a + \sin C\sin A\sin c\cos a \\ &-\cos C\cos A\cos b\sin c\cos a + \cos C\sin b\cos c\cos a. \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = &\sin a\cos b\sin c\sin B - \cos a\cos C\sin b\sin c\sin B \\ &-\sin a\sin b\cos A\cos c\sin B - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c\sin B \\ &+\sin C\cos a\sin A\cos c\sin B - \sin a\sin b\sin A\cos B \\ &-\cos a\cos b\cos C\sin A\cos B - \cos a\sin C\cos A\cos B. \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\cos a = \sin C\cos A\sin B + \sin C\sin A\cos c\cos B + \sin B\sin A\cos b\cos C - \cos B\cos A\cos c\cos b\cos C - \sin c\cos B\sin b\cos C. \quad (4)$$

$$\cos B = \sin a\cos b\sin c - \cos a\cos C\sin b\sin c - \sin a\sin b\cos A\cos c - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c + \sin A\cos a\cos c\sin C. \quad (5)$$

$$0 = \cos a\cos b\sin c + \cos C\sin a\sin b\sin c - \cos a\sin b\cos A\cos c + \sin a\cos b\cos C\cos A\cos c - \sin a\sin C\sin A\cos c. \quad (6)$$

$$0 = \cos C\cos A\sin B - \cos b\sin C\sin A\sin B + \cos C\sin A\cos c\cos B + \sin C\cos A\cos b\cos c\cos B + \sin C\sin b\sin c\cos B. \quad (7)$$

$$1 = \cos a\cos b\cos c + \cos C\sin a\sin b\cos c + \cos a\sin b\cos A\sin c - \cos b\sin a\cos C\cos A\sin c + \sin a\sin C\sin A\sin c. \quad (8)$$

$$1 = -\cos C\cos A\cos B + \cos b\sin C\sin A\cos B + \cos C\sin A\cos c\sin B + \cos A\sin C\cos b\cos c\sin B + \sin C\sin b\sin c\sin B. \quad (9)$$

$$-\cos c\cos B = \sin a\sin b\cos A + \cos a\cos b\cos A\cos C - \cos a\sin A\sin C. \quad (10)$$

$$\sin B\sin A - \cos c\cos B\cos A = \sin a\sin b + \cos C\cos a\cos b. \quad (11)$$

$$\sin c = \cos a\sin b\cos A - \cos b\sin a\cos A\cos C + \sin a\sin A\sin C. \quad (12)$$

$$\sin B = \cos C\sin A\cos c + \cos A\sin C\cos b\cos c + \sin b\sin c\sin C. \quad (13)$$

$$0 = \cos a\sin b\sin A - \sin a\cos b\cos C\sin A - \sin a\sin C\cos A. \quad (14)$$

$$\cos A\sin c = \cos a\sin b - \cos b\cos C\sin a. \quad (15)$$

$$-\cos B = \cos A\cos C - \cos b\sin A\sin C. \quad (16)$$

$$\cos c\sin B = \cos C\sin A + \cos A\sin C\cos b. \quad (17)$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C. \quad (18)$$

$$\sin A\sin c = \sin a\sin C. \quad (19)$$

Diese (19) merkwürdigen Relationen finden in jedem sphärischen Dreiecke statt. Da aus drei gegebenen Stücken die drei andern müssen gesucht werden können und von diesen dreien immer Sin. und Cos. gesucht werden muss, so sind 6 Gleichungen zur Auflösung nöthig. Da aber diese Gleichungen nicht vom ersten Grade sind, so ist eine weitere siebente nöthig, um die Bestimmungen unzweideutig zu machen. Im Allgemeinen werden also für ein sphärisches Dreieck sieben, alle Winkel umfassende, wesentlich verschiedene Relationen Statt haben müssen. Dies wollen wir im folgenden Paragraphen betrachten. Wir bemerken hier nur, dass die vorstehenden 19 Sätze alle wahr sind, wenn man vertauscht

	a, b, c, A, B, C
mit	b, c, a, B, C, A
oder	c, a, b, C, A, B
oder	a, c, b, A, C, B
oder	c, b, a, C, B, A
oder	$b, a, c, B, A, C.$

§. 10.

Die sieben Grundgleichungen, von denen wir im §. 9. gesprochen, sind offenbar (1), (2), (3), (4), (5), (10), (11). Aus ihnen leiten sich alle anderen ab. Auf folgende Art kann man alle 12 anderen erhalten.

Man multiplizire (5) mit $\cos c$ und addire (10), so erhält man eine Gleichung, die aus (6) entsteht, wenn man a und c vertauscht; (6) folgt also aus (5) und (10).

Multiplizirt man (4) mit $\cos B$, wechselt in (10) a und c und addirt, so erhält man eine Gleichung, die (7) giebt, wenn man B und C vertauscht; (7) folgt aus (4) und (10).

Multiplizirt man (4) mit $\sin a$ und addirt (2), so erhält man (12).

Multiplizirt man (5) mit $\sin B$ und subtrahirt (3), so erhält man (13).

Multiplizirt man (10) mit $\cos c$ und addirt (5), so erhält man (15).

Multiplizirt man (10) mit $\cos B$ und addirt (4), nachdem a und c gewechselt wurden, so erhält man (17).

Multiplizirt man (13) mit $\cos c$ und subtrahirt (17), so erhält man (14).

Setzt man den Werth von $\cos a \sin b \cos A - \sin a \sin A \sin C + \sin a \cos b \cos A \cos C$ aus (12) in (6), so erhält man (18).

Zieht man die Werthe von $\sin a$ und $\cos a$ aus (12) und (18) und setzt sie in (1), so erhält man (9).

Multiplizirt man (7) mit $\sin B$ und (9) mit $\cos B$ und subtrahirt, so findet man (16).

Setzt man in (1) die Werthe von $\sin B$ und $\cos B$ aus (13) und (16), so erhält man (8).

Setzt man aus (13) und (16) die Werthe von $\sin B$ und $\cos B$ in (11) und beachtet (18), so erhält man (19).

Die Ordnung, in der also die Gleichungen des §. 9. zu folgen haben, ist:

(1), (2), (3), (4), (5), (10), (11) — Grundgleichungen.

(6) abgeleitet aus (5) und (10);
(7) „ „ (4) „ (10);
(12) „ „ (2) „ (4);
(13) „ „ (3) „ (5);
(15) „ „ (5) „ (10);
(17) „ „ (4) „ (10);
(14) „ „ (13) „ (17);
(18) „ „ (6) „ (12);
(9) „ „ (1) „ (12) und (18);
(16) „ „ (7) „ (9);
(8) „ „ (1) „ (13) und (16);
(19) „ „ (11) „ (13) und (16) und (18).

Dadurch ist nun thatsächlich nachgewiesen, dass jene 19 Gleichungen nicht lauter Grundgleichungen sind. Aber es hat Doctor A. Müller neue, sehr schöne und symmetrische Relationen aufgestellt. Wir übergehen hier die Anwendungen, da sie nicht im Zwecke des gegenwärtigen Aufsatzes liegen. Nur wollen wir noch zeigen, wie die Gaussischen Formeln unmittelbar abgeleitet werden können, nicht zu gedenken der Schaar neuer Sätze, die durch Kombination der 19 Gleichungen gewonnen werden könnten.

§. 11.

Die Gleichung (16) giebt

$$-\cos C = \cos A \cos B - \cos c \sin A \sin B.$$

Addirt man nun die Gleichungen (18), (11) und diese Gleichung, so erhält man

$$\cos c + \sin A \sin B - \cos c \cos A \cos B + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c =$$
$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C - \cos C$$

oder

$$\cos c + \cos(A-B) - \cos c \cos(A-B) = \cos(a-b) + \cos C \cos(a-b) - \cos C$$

also auch

$$1 - \cos c - \cos(A-B) + \cos c \cos(A-B) = 1 - \cos(a-b) - \cos C \cos(a-b) + \cos C$$

oder

$$(1-\cos(A-B))(1-\cos c) = (1-\cos(a-b))(1+\cos C),$$

d. i.

$$\sin^2\frac{A-B}{2} \cdot \sin^2\frac{c}{2} = \sin^2\frac{a-b}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2}$$

oder

$$\sin\frac{A-B}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}. \quad (A)$$

Aus den drei Gleichungen (18), (11), (16) ergiebt sich:

$$1 + \cos C + \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C$$
$$= 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c + \cos c + \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c,$$

d. i.

$$1 + \cos C + \cos(a-b) + \cos(a-b)\cos C = 1 + \cos c - \cos(A+B) - \cos c \cos(A+B)$$

oder

$$(1+\cos(a-b))(1+\cos C) = (1-\cos(A+B))(1+\cos c),$$

woraus

$$\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}. \quad (B).$$

sis, welcher, wenn eine Funktion in eine ganz andere Funktio übergeht, die daraus folgenden Ergebnisse untersucht und anwen den lehrt, wird Variationskalkul genannt.

Drittens. Ist es nun gleichgiltig, dass das Wort „Varia tion" schon in der Algebra und dann wieder im höchsten Zweig der Analysis vorkommt, und so zur Benennung von zweierlei Din gen gebraucht wird, die nicht das Allergeringste mit einander ge meinschaftlich haben?

Wenn man das in Gleichung III) vorkommende w, welche man die ganz willkürliche Werthänderung $(w+k)$ beilegen kann eine variable Grösse nennt; ist es dann gut, dass man auch da in Gleichung XII) vorkommende $w=fx$, welches in Fx übergeht ebenfalls eine variable Grösse nennt?

So gewiss es höchst fatal ist, wenn in einer und derselben Wissenschaft durch ein einziges Wort zwei ganz verschiedene Begriffe bezeichnet werden; so gewiss ist es nöthig, dass hier abgeholfen werde. Wo aber abzuhelfen sei, darüber kann kein Bedenken stattfinden.

Ein Begriff, welcher schon einem früheren Zweige einer Wis senschaft angehört, kommt auch in den späteren Zweigen vor dagegen ein Begriff, welcher erst einem späteren Zweige ange hört, kommt in den früheren Zweigen nicht vor. Der termin technicus, wodurch ein einem früheren Zweige der Wissenscha angehörender Begriff ausgedrückt wird, kommt also auch in de späteren Zweigen vor; dagegen der terminus technicus, wodur ein einem späteren Zweige einer Wissenschaft angehörender Be griff ausgedrückt wird, kommt in den früheren Zweigen nicht vo

Ausserdem ist es Thatsache, dass es viele Lehrbücher übe Differential- und Integral-Kalkul giebt, in denen keine Spur de sogenannten Variations-Kalkuls vorkommt.

Man thut also am besten, dem höheren Zweige der Analysi dem sogenannten Variationskalkul, einen anderen Namen zu gebe der so gewählt ist, dass sich für die daselbst vorkommende Wörter „Variation" und „variabel" die entsprechende Namen von selbst ergeben; denn

1) Dadurch wird in die früheren Zweige der Mathematik nic die geringste Störung gebracht; und auch

2) Diejenigen Lehrbücher über Differential- und Integral-Ka kul, welche nichts von dem sogenannten Variations-Kalkul entha ten, werden von dieser Namensänderung nicht im Geringste berührt.

Nachdem nun die Zweckmässigkeit und beziehungsweise d Nothwendigkeit, dem sogenannten Variationskalkul einen ander Namen zu geben, dargethan ist, fragt sich: welches Wort so man wählen?

Es wäre dringend nöthig, ein Wort vorzuschlage Dieses müsste aus der Lateinischen Sprache entnom men sein, damit, wenn dessen Zweckmässigkeit v anderen Nationen anerkannt wird, sie es bequem au in ihre Sprache aufnehmen können. Ich habe zwar sch selbst ein Wort gewählt, bin aber bereit, ein zweckmässigere wenn eins vorgeschlagen wird, sogleich anzunehmen.

also nach 1)

$$3)\quad \begin{cases} x'=x+\varrho\cos\varphi, & y'=y+\varrho\sin\varphi; \\ x_1'=x+\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & y_1'=y+\varrho_1\sin(\varphi+\alpha); \\ x_2'=x+\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & y_2'=y+\varrho_2\sin(\varphi+\beta); \end{cases}$$

und folglich durch Elimination von ϱ, ϱ_1, ϱ_2:

$$4)\quad \begin{cases} x\sin\varphi-y\cos\varphi = x'\sin\varphi-y'\cos\varphi; \\ x\sin(\varphi+\alpha)-y\cos(\varphi+\alpha)=x'\sin(\varphi+\alpha)-y'\cos(\varphi+\alpha); \\ x\sin(\varphi+\beta)-y\cos(\varphi+\beta)=x'\sin(\varphi+\beta)-y'\cos(\varphi+\beta). \end{cases}$$

Die von den Linien M_1M', M_1M_1', M_1M_2', welche durch ϱ', ϱ_1', ϱ_2' bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M_1 gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz auf ähnliche Art wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ genommenen Winkel wollen wir durch φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ bezeichnen, wo α_1 und β_1 sich immer leicht aus den gemessenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkeln $M'M_1M_1'$, $M'M_1M_2'$ werden finden lassen und daher jederzeit als bekannt zu betrachten sind. Dies vorausgesetzt, erhält man ganz auf ähnliche Art wie vorher die Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} x'=x_1+\varrho'\cos\varphi_1, & y'=y_1+\varrho'\sin\varphi_1; \\ x_1'=x_1+\varrho_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1), & y_1'=y_1+\varrho_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1); \\ x_2'=x_1+\varrho_2'\cos(\varphi_1+\beta_1), & y_2'=y_1+\varrho_2'\sin(\varphi_1+\beta_1); \end{cases}$$

aus denen sich ferner durch Elimination von ϱ', ϱ_1', ϱ_2' die Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1 = x'\sin\varphi_1-y'\cos\varphi_1; \\ x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1)=x_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1); \\ x_1\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_1\cos(\varphi_1+\beta_1)=x_2\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_2'\cos(\varphi_1+\beta_1) \end{cases}$$

ergeben.

Bezeichnet man nun die Seiten $M'M_1'$, $M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ respective durch r, r_1 und die von diesen beiden Seiten mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M' gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ und φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ genommenen Winkel durch ψ, $\psi+\gamma$, wo γ offenbar immer aus dem gemessenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel $M_1'M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ leicht gefunden werden kann; so hat man auf ganz ähnliche Weise wie vorher die Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} x_1'=x'+r\cos\psi, \\ y_1'=y'+r\sin\psi \end{cases}$$

und

$$8)\quad \begin{cases} x_2' = x' + r_1\cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + r_1\sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Weil aber

$$r : r_1 = \sin M'M_2'M_1' : \sin M'M_1'M_2'$$

ist, und die Winkel des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ gemessen worden sind, so ist das Verhältniss

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\sin M'M_1'M_2'}{\sin M'M_2'M_1'}$$

bekannt, und wir können folglich

$$9)\quad r_1 = \mu r,$$

wo μ eine bekannte Grösse bezeichnet, setzen, wodurch die Gleichungen (8) in die folgenden übergehen:

$$10)\quad \begin{cases} x_2' = x' + \mu r\cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + \mu r\sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Nach 4), 6), 7), 10) haben wir also die zehn folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x\sin\varphi - y\cos\varphi &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi, \\
x\sin(\varphi+\alpha) - y\cos(\varphi+\alpha) &= x_1'\sin(\varphi+\alpha) - y_1'\cos(\varphi+\alpha), \\
x\sin(\varphi+\beta) - y\cos(\varphi+\beta) &= x_2'\sin(\varphi+\beta) - y_2'\cos(\varphi+\beta); \\
x_1\sin\varphi_1 - y_1\cos\varphi_1 &= x'\sin\varphi_1 - y'\cos\varphi_1, \\
x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1) &= x_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1), \\
x_1\sin(\varphi_1+\beta_1) - y_1\cos(\varphi_1+\beta_1) &= x_2'\sin(\varphi_1+\beta_1) - y_2'\cos(\varphi_1+\beta_1); \\
x_1' &= x' + r\cos\psi, \\
y_1' &= y' + r\sin\psi; \\
x_2' &= x' + \mu r\cos(\psi+\gamma), \\
y_2' &= y' + \mu r\sin(\psi+\gamma)
\end{aligned}$$

zwischen den zehn unbekannten Grössen x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2'; r, φ, φ_1, ψ; aus denen diese zehn unbekannten Grössen bestimmt werden müssen.

Eliminirt man aus diesen zehn Gleichungen die vier unbekannten Grössen x_1', y_1'; x_2', y_2'; so erhält man:

$$11)\quad \begin{cases}
(x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\
(x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha) + r\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\
(x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta) + \mu r\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma); \\
(x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1) + r\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1) + \mu r\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma);
\end{cases}$$

welche sechs Gleichungen bloss noch die sechs unbekannten Grössen x', y', r, φ, φ_1, ψ enthalten.

Aus der ersten und zweiten Gleichung des ersten der beiden Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen, folgt leicht:

$$12)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\alpha = r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\ (y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha); \end{cases}$$

und eben so folgt aus der ersten und dritten Gleichung desselben Systems:

$$13)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\beta = \mu r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma), \\ (y-y')\sin\beta = \mu r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma). \end{cases}$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus dem zweiten der beiden Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen:

$$14)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\alpha_1 = r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\ (y_1-y')\sin\alpha_1 = r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1); \end{cases}$$

und

$$15)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\beta_1 = \mu r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma), \\ (y_1-y')\sin\beta_1 = \mu r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\mu\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)}, \\ \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\mu\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \\ \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner:

$$18)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}, \\ \operatorname{tang}(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}. \end{cases}$$

Berechnen wir die Hülfswinkel ω, ω' und ω_1, ω_1' mittelst der Formeln:

$$19)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\omega = \dfrac{\mu\sin(\beta-\gamma)}{\cot\alpha\sin\beta}, \quad \operatorname{tang}\omega' = -\dfrac{\mu\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta}; \\ \operatorname{tang}\omega_1 = \dfrac{\mu\sin(\beta_1-\gamma)}{\cot\alpha_1\sin\beta_1}, \quad \operatorname{tang}\omega_1' = -\dfrac{\mu\cos(\beta_1-\gamma)}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

$$1 = -\cos C\cos A\cos B + \cos b\sin C\sin A\cos B + \cos C\sin A\cos c\sin B + \cos A\sin C\cos b\cos c\sin B + \sin C\sin b\sin c\sin B. \quad (9)$$

$$-\cos c\cos B = \sin a\sin b\cos A + \cos a\cos b\cos A\cos C - \cos a\sin A\sin C. \quad (10)$$

$$\sin B\sin A - \cos c\cos B\cos A = \sin a\sin b + \cos C\cos a\cos b. \quad (11)$$

$$\sin c = \cos a\sin b\cos A - \cos b\sin a\cos A\cos C + \sin a\sin A\sin C. \quad (12)$$

$$\sin B = \cos C\sin A\cos c + \cos A\sin C\cos b\cos c + \sin b\sin c\sin C. \quad (13)$$

$$0 = \cos a\sin b\sin A - \sin a\cos b\cos C\sin A - \sin a\sin C\cos A. \quad (14)$$

$$\cos A\sin c = \cos a\sin b - \cos b\cos C\sin a. \quad (15)$$

$$-\cos B = \cos A\cos C - \cos b\sin A\sin C. \quad (16)$$

$$\cos c\sin B = \cos C\sin A + \cos A\sin C\cos b. \quad (17)$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C. \quad (18)$$

$$\sin A\sin c = \sin a\sin C. \quad (19)$$

Diese (19) merkwürdigen Relationen finden in jedem sphärischen Dreiecke statt. Da aus drei gegebenen Stücken die drei andern müssen gesucht werden können und von diesen dreien immer Sin. und Cos. gesucht werden muss, so sind 6 Gleichungen zur Auflösung nöthig. Da aber diese Gleichungen nicht vom ersten Grade sind, so ist eine weitere siebente nöthig, um die Bestimmungen unzweideutig zu machen. Im Allgemeinen werden also für ein sphärisches Dreieck sieben, alle Winkel umfassende, wesentlich verschiedene Relationen Statt haben müssen. Dies wollen wir im folgenden Paragraphen betrachten. Wir bemerken hier nur, dass die vorstehenden 19 Sätze alle wahr sind, wenn man vertauscht

	a, b, c, A, B, C
mit	b, c, a, B, C, A
oder	c, a, b, C, A, B
oder	a, c, b, A, C, B
oder	c, b, a, C, B, A
oder	$b, a, c, B, A, C.$

§. 10.

Die sieben Grundgleichungen, von denen wir im §. 9. gesprochen, sind offenbar (1), (2), (3), (4), (5), (10), (11). Aus ihnen leiten sich alle anderen ab. Auf folgende Art kann man alle 12 anderen erhalten.

Man multiplizire (5) mit $\cos c$ und addire (10), so erhält man eine Gleichung, die aus (6) entsteht, wenn man a und c vertauscht; (6) folgt also aus (5) und (10).

den hieraus sich ergebenden Gleichungen die erste und vierte der Gleichungen 24); so erhält man die vier folgenden, die unbekannten Grössen x', y', φ, φ_1 enthaltenden Gleichungen:

$$27)\begin{cases}(x-x')\sin\varphi=(y-y')\cos\varphi,\\(x_1-x')\sin\varphi_1=(y_1-y')\cos\varphi_1,\\(x-x')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin(\varphi+\alpha)-(x_1-x')\sin(\alpha+\Theta)\sin(\varphi_1+\alpha_1)\\=(y-y')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos(\varphi+\alpha)-(y_1-y')\sin(\alpha+\Theta)\cos(\varphi_1+\alpha_1),\\(x-x')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin(\varphi+\beta)-(x_1-x')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin(\varphi_1+\beta_1)\\=(y-y')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos(\varphi+\beta)-(y_1-y')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos(\varphi_1+\beta_1).\end{cases}$$

Bestimmt man aus der ersten und zweiten Gleichung x' und y', so erhält man, weil nach 21)

$$28)\quad \varphi-\varphi_1=\Theta-\Theta_1$$

ist:

$$29)\begin{cases}x'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\cos\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\cos\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)},\\y'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\sin\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\sin\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)}.\end{cases}$$

Bekanntlich ist aber

$$\begin{aligned}2\sin\varphi\cos\varphi_1&=\sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1)\\&=\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1),\\2\cos\varphi\sin\varphi_1&=-\sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1)\\&=-\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1),\\2\sin\varphi\sin\varphi_1&=\cos(\varphi-\varphi_1)-\cos(\varphi+\varphi_1)\\&=\cos(\Theta-\Theta_1)-\cos(\varphi+\varphi_1),\\2\cos\varphi\cos\varphi_1&=\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi+\varphi_1)\\&=\cos(\Theta-\Theta_1)+\cos(\varphi+\varphi_1);\end{aligned}$$

folglich nach 29):

$$30)\begin{cases}x'=\dfrac{(x+x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)},\\y'=\dfrac{(x-x_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(y+y_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(x-x_1)\cos(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\sin(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)}.\end{cases}$$

Aus der ersten, zweiten und dritten der Gleichungen 27) erhält man, wenn man zuerst $y-y'$ und y_1-y', dann $x-x'$ und x_1-x' eliminirt, ohne Schwierigkeit die beiden Gleichungen:

§. 11.

Die Gleichung (16) giebt

$$-\cos C = \cos A \cos B - \cos c \sin A \sin B.$$

Addirt man nun die Gleichungen (18), (11) und diese Gleichung, so erhält man

$$\cos c + \sin A \sin B - \cos c \cos A \cos B + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c =$$
$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C - \cos C$$

oder

$$\cos c + \cos(A-B) - \cos c \cos(A-B) = \cos(a-b) + \cos C \cos(a-b) - \cos C$$

also auch

$$1 - \cos c - \cos(A-B) + \cos c \cos(A-B) = 1 - \cos(a-b)$$
$$- \cos C \cos(a-b) + \cos C$$

oder

$$(1-\cos(A-B))(1-\cos c) = (1-\cos(a-b))(1+\cos C),$$

d. i.

$$\sin^2\frac{A-B}{2} \cdot \sin^2\frac{c}{2} = \sin^2\frac{a-b}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2}$$

oder

$$\sin\frac{A-B}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}. \quad (A)$$

Aus den drei Gleichungen (18), (11), (16) ergiebt sich:

$$1 + \cos C + \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C$$
$$= 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c + \cos c + \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c,$$

d. i.

$$1 + \cos C + \cos(a-b) + \cos(a-b)\cos C = 1 + \cos c - \cos(A+B)$$
$$- \cos c \cos(A+B)$$

oder

$$(1+\cos(a-b))(1+\cos C) = (1-\cos(A+B))(1+\cos c),$$

woraus

$$\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}. \quad (B).$$

ist, so ist nach 36)

$$38)\quad (x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}$$

oder

$$39)\quad (x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}.$$

Weil nun aber bekanntlich

$$\sin(\varphi+\varphi_1)=\frac{2\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2},$$
$$\cos(\varphi+\varphi_1)=\frac{1-\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}$$

ist, so wird die vorstehende Gleichung:

$$40)\quad \frac{2(x-x_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\{1-\tang_2(\varphi+\varphi_1)^2\}}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)},$$

und enthält unter dieser Form bloss noch die eine unbekannte Grösse $\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$.

Ordnet man diese Gleichung gehörig, so erhält sie folgende Gestalt:

$$41)\quad 0=\{A+B+(C-D)(y-y_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$+\{(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$+(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$$
$$+\{(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$-(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2$$
$$+\{A-B-(C+D)(y-y_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^3.$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$A+B+(C-D)(y-y_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$=2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$+2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1),$$

und auf ähnliche Weise:

$$A-B-(C+D)(y-y)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$=2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$-2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1).$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\+(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\-(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$=-2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2$$
$$+2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2,$$

und auf ähnliche Art

$$(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\-(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\+(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$=-2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2$$
$$-2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2.$$

Setzen wir der Kürze wegen

42) $$K=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}$$

und

43) $$L=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\};$$

so ist

$$A+B+(C-D)(y-y_1)=2K\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1,$$
$$A-B-(C+D)(y-y_1)=2L\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1);$$
$$(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=-2L\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2,$$
$$(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=-2K\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2.$$

also nach 1)

$$3)\quad \begin{cases} x'=x+\varrho\cos\varphi, & y'=y+\varrho\sin\varphi; \\ x_1'=x+\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & y_1'=y+\varrho_1\sin(\varphi+\alpha); \\ x_2'=x+\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & y_2'=y+\varrho_2\sin(\varphi+\beta); \end{cases}$$

und folglich durch Elimination von ϱ, ϱ_1, ϱ_2:

$$4)\quad \begin{cases} x\sin\varphi-y\cos\varphi = x'\sin\varphi-y'\cos\varphi; \\ x\sin(\varphi+\alpha)-y\cos(\varphi+\alpha)=x'\sin(\varphi+\alpha)-y'\cos(\varphi+\alpha); \\ x\sin(\varphi+\beta)-y\cos(\varphi+\beta)=x'\sin(\varphi+\beta)-y'\cos(\varphi+\beta). \end{cases}$$

Die von den Linien M_1M', M_1M_1', M_1M_2', welche durch ϱ', ϱ_1', ϱ_2' bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M_1 gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz auf ähnliche Art wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ genommenen Winkel wollen wir durch φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ bezeichnen, wo α_1 und β_1 sich immer leicht aus den gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkeln $M'M_1M_1'$, $M'M_1M_2'$ werden finden lassen und daher jederzeit als bekannt zu betrachten sind. Dies vorausgesetzt, erhält man ganz auf ähnliche Art wie vorher die Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} x'=x_1+\varrho'\cos\varphi_1, & y'=y_1+\varrho'\sin\varphi_1; \\ x_1'=x_1+\varrho_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1), & y_1'=y_1+\varrho_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1); \\ x_2'=x_1+\varrho_2'\cos(\varphi_1+\beta_1), & y_2'=y_1+\varrho_2'\sin(\varphi_1+\beta_1); \end{cases}$$

aus denen sich ferner durch Elimination von ϱ', ϱ_1', ϱ_2' die Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1 = x'\sin\varphi_1-y'\cos\varphi_1; \\ x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1)=x_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1); \\ x_1\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_1\cos(\varphi_1+\beta_1)=x_2\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_2'\cos(\varphi_1+\beta_1) \end{cases}$$

ergeben.

Bezeichnet man nun die Seiten $M'M_1'$, $M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ respective durch r, r_1 und die von diesen beiden Seiten mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M' gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ und φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ genommenen Winkel durch ψ, $\psi+\gamma$, wo offenbar immer aus dem gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkel $M_1'M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ leicht gefunden werden kann; so hat man auf ganz ähnliche Weise wie vorher die Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} x_1'=x'+r\cos\psi, \\ y_1'=y'+r\sin\psi \end{cases}$$

und

51) $$\begin{cases} A'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)+(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ B'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)-(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ C'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1), \\ D'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta) \end{cases}$$

gesetzt wird:

52) $A=A'(-1)^n$, $B=B'(-1)^{n_1}$, $C=C'(-1)^{n_1}$, $D=D'(-1)^n$.

Setzen wir nun zuerst

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\cot\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{\pi-(\Theta-\Theta_1)\},$$

so ist, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=(k+\tfrac{1}{2})\pi-\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1);$$

und weil nun nach 28)

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)=\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

ist, so ist

53) $\varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi$, $\varphi_1=(k+\tfrac{1}{2})\pi-(\Theta-\Theta_1)$,

also nach 50)

54) $\varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi$, $\varphi_1=(k-n+n_1+\tfrac{1}{2})\pi-(\delta-\delta_1)$,

und folglich

55) $$\begin{cases} \sin\varphi=(-1)^k, \cos\varphi=0; \\ \sin\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\cos(\delta-\delta_1), \cos\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\sin(\delta-\delta_1). \end{cases}$$

Zur Bestimmung von x' und y' hat man nun nach 31) und 35) die folgenden Gleichungen:

$$C(x-x')\cos\varphi_1=D(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C(y-y')\sin\varphi_1=D(y_1-y')\sin\varphi;$$

also nach 52)

56) $$\begin{cases} C'(x-x')\cos\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi, \\ C'(y-y')\sin\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 55) ein, so erhält man:

welche sechs Gleichungen bloss noch die sechs unbekannten Gr
sen x', y', r, φ, φ_1, ψ enthalten.

Aus der ersten und zweiten Gleichung des ersten der beid
Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen, folgt leicht

$$12)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\alpha = r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\ (y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha); \end{cases}$$

und eben so folgt aus der ersten und dritten Gleichung dessell
Systems:

$$13)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\beta = \mu r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma), \\ (y-y')\sin\beta = \mu r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma). \end{cases}$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus dem zweiten der beid
Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen:

$$14)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\alpha_1 = r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\ (y_1-y')\sin\alpha_1 = r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1); \end{cases}$$

und

$$15)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\beta_1 = \mu r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma), \\ (y_1-y')\sin\beta_1 = \mu r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\mu\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)}, \\ \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\mu\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \\ \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner:

$$18)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}, \\ \operatorname{tang}(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}. \end{cases}$$

Berechnen wir die Hülfswinkel ω, ω' und ω_1, ω_1' mittelst d
Formeln:

$$19)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\omega = \dfrac{\mu\sin(\beta-\gamma)}{\cot\alpha\sin\beta}, \ \operatorname{tang}\omega' = -\dfrac{\mu\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta}; \\ \operatorname{tang}\omega_1 = \dfrac{\mu\sin(\beta_1-\gamma)}{\cot\alpha_1\sin\beta_1}, \ \operatorname{tang}\omega_1' = -\dfrac{\mu\cos(\beta_1-\gamma)}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

so ist

$$20)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \operatorname{tang}(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}. \end{cases}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$21)\quad \varphi-\psi=\Theta,\ \varphi_1-\psi=\Theta_1;$$

also

$$22)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma}, \\ \operatorname{tang}\Theta_1 = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$23)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \operatorname{tang}\Theta_1 = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}; \end{cases}$$

so erhalten die Gleichungen 11) folgende Form:

$$24)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\ (x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha)+r\sin(\alpha+\Theta), \\ (x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta)+\mu r\sin(\beta-\gamma+\Theta); \\ (x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)+r\sin(\alpha_1+\Theta_1), \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)+\mu r\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$25)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\alpha)-(y-y')\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)}{\sin(\alpha_1+\Theta_1)} \end{cases}$$

und

$$26)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\beta)-(y-y')\cos(\varphi+\beta)}{\mu\sin(\beta-\gamma+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)}{\mu\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)}. \end{cases}$$

Setzt man sowohl die beiden Werthe von r in 25), als auch die beiden Werthe von r in 26) einander gleich und verbindet mit

welche sechs Gleichungen bloss noch die sechs unbekannten Gr
sen x', y', r, φ, φ_1, ψ enthalten.

Aus der ersten und zweiten Gleichung des ersten der beid
Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen, folgt leicht

$$12)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\alpha = r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\ (y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha); \end{cases}$$

und eben so folgt aus der ersten und dritten Gleichung desselb
Systems:

$$13)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\beta = \mu r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma), \\ (y-y')\sin\beta = \mu r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma). \end{cases}$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus dem zweiten der beid
Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen:

$$14)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\alpha_1 = r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\ (y_1-y')\sin\alpha_1 = r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1); \end{cases}$$

und

$$15)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\beta_1 = \mu r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma), \\ (y_1-y')\sin\beta_1 = \mu r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\mu\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)}, \\ \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\mu\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \\ \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner:

$$18)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}, \\ \operatorname{tang}(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}. \end{cases}$$

Berechnen wir die Hülfswinkel ω, ω' und ω_1, ω_1' mittelst d
Formeln:

$$19)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\omega = \dfrac{\mu\sin(\beta-\gamma)}{\cot\alpha\sin\beta}, \quad \operatorname{tang}\omega' = -\dfrac{\mu\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta}; \\ \operatorname{tang}\omega_1 = \dfrac{\mu\sin(\beta_1-\gamma)}{\cot\alpha_1\sin\beta_1}, \quad \operatorname{tang}\omega_1' = -\dfrac{\mu\cos(\beta_1-\gamma)}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

so ist

$$20)\quad \begin{cases} \tan(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \tan(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}. \end{cases}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$21)\quad \varphi-\psi=\Theta,\ \varphi_1-\psi=\Theta_1;$$

also

$$22)\quad \begin{cases} \tan\Theta = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}, \\ \tan\Theta_1 = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$23)\quad \begin{cases} \tan\Theta = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \tan\Theta_1 = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}; \end{cases}$$

so erhalten die Gleichungen 11) folgende Form:

$$24)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\ (x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha)+r\sin(\alpha+\Theta), \\ (x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta)+\mu r\sin(\beta-\gamma+\Theta); \\ (x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)+r\sin(\alpha_1+\Theta_1), \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)+\mu r\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$25)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\alpha)-(y-y')\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)}{\sin(\alpha_1+\Theta_1)} \end{cases}$$

und

$$26)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\beta)-(y-y')\cos(\varphi+\beta)}{\mu\sin(\beta-\gamma+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)}{\mu\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)}. \end{cases}$$

Setzt man sowohl die beiden Werthe von r in 25), als auch die beiden Werthe von r in 26) einander gleich und verbindet mit

den hieraus sich ergebenden Gleichungen die erste und vierte der Gleichungen 24); so erhält man die vier folgenden, die unbekannten Grössen x', y', φ, φ_1 enthaltenden Gleichungen:

$$27)\begin{cases}(x-x')\sin\varphi=(y-y')\cos\varphi,\\(x_1-x')\sin\varphi_1=(y_1-y')\cos\varphi_1,\\(x-x')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin(\varphi+\alpha)-(x_1-x')\sin(\alpha+\Theta)\sin(\varphi_1+\alpha_1)\\=(y-y')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos(\varphi+\alpha)-(y_1-y')\sin(\alpha+\Theta)\cos(\varphi_1+\alpha_1),\\(x-x')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin(\varphi+\beta)-(x_1-x')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin(\varphi_1+\beta_1)\\=(y-y')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos(\varphi+\beta)-(y_1-y')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos(\varphi_1+\beta_1\end{cases}$$

Bestimmt man aus der ersten und zweiten Gleichung x' und y', so erhält man, weil nach 21)

$$28)\quad \varphi-\varphi_1=\Theta-\Theta_1$$

ist:

$$29)\begin{cases}x'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\cos\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\cos\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)},\\y'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\sin\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\sin\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)}.\end{cases}$$

Bekanntlich ist aber

$$\begin{aligned}2\sin\varphi\cos\varphi_1&=\sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1)\\&=\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1),\\2\cos\varphi\sin\varphi_1&=-\sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1)\\&=-\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1),\\2\sin\varphi\sin\varphi_1&=\cos(\varphi-\varphi_1)-\cos(\varphi+\varphi_1)\\&=\cos(\Theta-\Theta_1)-\cos(\varphi+\varphi_1),\\2\cos\varphi\cos\varphi_1&=\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi+\varphi_1)\\&=\cos(\Theta-\Theta_1)+\cos(\varphi+\varphi_1);\end{aligned}$$

folglich nach 29):

$$30)\begin{cases}x'=\dfrac{(x+x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)},\\y'=\dfrac{(x-x_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(y+y_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(x-x_1)\cos(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\sin(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)}.\end{cases}$$

Aus der ersten, zweiten und dritten der Gleichungen 27) erhält man, wenn man zuerst $y-y'$ und y_1-y', dann $x-x'$ und x_1-x' eliminirt, ohne Schwierigkeit die beiden Gleichungen:

$$31)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1 \\ =(x_1-x')\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi, \\ (y-y')\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1 \\ =(y_1-y')\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi; \end{cases}$$

und eben so leicht erhält man aus der ersten, zweiten und vierten der Gleichungen 27) die beiden Gleichungen:

$$32)\quad \begin{cases} (a-x')\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1 \\ =(x_1-x')\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi, \\ (y-y')\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1 \\ =(y_1-y')\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi. \end{cases}$$

Aus 31) folgt.

$$33)\quad \begin{cases} x'=\dfrac{x\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1-x_1\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi}, \\ y'=\dfrac{y\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1-y_1\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi}; \end{cases}$$

und aus 32) erhält man:

$$34)\quad \begin{cases} x'=\dfrac{x\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1-x_1\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi}{\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1-\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi}, \\ y'=\dfrac{y\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1-y_1\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1-\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi}. \end{cases}$$

Setzt man die beiden Ausdrücke von x' aus 30) und 33) einander gleich, so erhält man nach einigen leichten Reductionen, wenn der Kürze wegen

$$35)\quad \begin{cases} A=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)\}, \\ B=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)\}, \\ C=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1), \\ D=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta) \end{cases}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$36)\quad \frac{A\cos\varphi_1+B\cos\varphi}{C\cos\varphi_1-D\cos\varphi}=(x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1).$$

Weil aber

$$\varphi-\varphi_1=\Theta-\Theta_1,$$

und folglich offenbar

$$37)\quad \begin{cases} \varphi=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1), \\ \varphi_1=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) \end{cases}$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' erhält man die folgenden Gleichungen:

$$84)\quad \begin{cases} x_1' = x' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} \cdot r\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_1' = y' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} \cdot r\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

und

$$85)\quad \begin{cases} x_2' = x' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} \cdot r_1\cos\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_2' = y' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} \cdot r_1\sin\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo eine Zweideutigkeit nicht vorhanden ist, weil man nach dem Vorhergehenden weiss, ob $\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)$ gerade oder ungerade ist.

Bezeichnen wir den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen die Formel 76) für $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ liefert, durch i_1; so ist nach 75) und 76)

$$\cot i_1 = -\operatorname{tang} i.$$

Jenachdem nun i positiv oder negativ ist, ist der absolute Werth von $i-\frac{1}{2}\pi$ oder $i+\frac{1}{2}\pi$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$; und weil nun

$$\cot(i \mp \tfrac{1}{2}\pi) = -\operatorname{tang} i$$

ist, so ist offenbar

$$86)\quad i_1 = i \mp \tfrac{1}{2}\pi,$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Ueberhaupt ist nun wieder, wenn λ_1 eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$87)\quad \tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = i_1 + \lambda_1\pi,$$

und weil bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1) + \tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \tfrac{1}{2}(n-n_1-1)\pi$$

ist, so ist

$$88)\quad \begin{cases} \varphi = i_1 + \frac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \{\lambda_1 + \frac{1}{2}(n-n_1-1)\}\pi, \\ \varphi_1 = i_1 - \frac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \{\lambda_1 - \frac{1}{2}(n-n_1-1)\}\pi; \end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass in diesem Falle, wo $n-n_1$ eine ungerade Zahl ist, $\frac{1}{2}(n-n_1-1)$ eine ganze Zahl ist.

Also ist

$$8)\quad \begin{cases} x_2' = x' + r_1\cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + r_1\sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Weil aber

$$r : r_1 = \sin M'M_2'M_1' : \sin M'M_1'M_2'$$

ist, und die Winkel des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ gemessen worden sind, so ist das Verhältniss

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\sin M'M_1'M_2'}{\sin M'M_2'M_1'}$$

bekannt, und wir können folglich

$$9)\quad r_1 = \mu r,$$

wo μ eine bekannte Grösse bezeichnet, setzen, wodurch die Gleichungen (8) in die folgenden übergehen:

$$10)\quad \begin{cases} x_2' = x' + \mu r\cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + \mu r\sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Nach 4), 6), 7), 10) haben wir also die zehn folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x\sin\varphi - y\cos\varphi &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi, \\
x\sin(\varphi+\alpha) - y\cos(\varphi+\alpha) &= x_1'\sin(\varphi+\alpha) - y_1'\cos(\varphi+\alpha), \\
x\sin(\varphi+\beta) - y\cos(\varphi+\beta) &= x_2'\sin(\varphi+\beta) - y_2'\cos(\varphi+\beta); \\
x_1\sin\varphi_1 - y_1\cos\varphi_1 &= x'\sin\varphi_1 - y'\cos\varphi_1, \\
x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1) &= x_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1), \\
x_1\sin(\varphi_1+\beta_1) - y_1\cos(\varphi_1+\beta_1) &= x_2'\sin(\varphi_1+\beta_1) - y_2'\cos(\varphi_1+\beta_1); \\
x_1' &= x' + r\cos\psi, \\
y_1' &= y' + r\sin\psi; \\
x_2' &= x' + \mu r\cos(\psi+\gamma), \\
y_2' &= y' + \mu r\sin(\psi+\gamma)
\end{aligned}$$

zwischen den zehn unbekannten Grössen x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2'; r, φ, φ_1, ψ; aus denen diese zehn unbekannten Grössen bestimmt werden müssen.

Eliminirt man aus diesen zehn Gleichungen die vier unbekannten Grössen x_1', y_1'; x_2', y_2'; so erhält man:

$$11)\quad \begin{cases}
(x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\
(x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha) + r\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\
(x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta) + \mu r\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma); \\
(x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1) + r\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1) + \mu r\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma);
\end{cases}$$

$$\varphi - \psi + \alpha = \alpha + \delta + n\pi$$

ist, so ist

$$(y-y')\sin\alpha = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)+n}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem i positiv oder negativ ist. Es ist aber

$$(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)+n} = (-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.(-1)^n$$
$$= (-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.(-1)^{-n} = (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)},$$

und folglich

$$93)\quad (y-y')\sin\alpha = \pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Mittelst dieser Gleichung ist r zu bestimmen, und da r immer positiv ist, so ergiebt sich aus derselben zugleich, ob $\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)$ gerade oder ungerade ist.

Wenn man r hat, so findet man r_1 mittelst der Formel

$$94)\quad r_1 = \mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' hat man die Formeln:

$$x_1' = x' - (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i_1-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},$$
$$y_1' = y' + (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i_1-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};$$

und

$$x_2' = x' - (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i_1+\gamma-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},$$
$$y_2' = y' + (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i_1+\gamma-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};$$

oder nach 86):

$$95)\quad \begin{cases} x_1' = x' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_1' = y' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

und

$$96)\quad \begin{cases} x_2' = x' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_2' = y' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Eine Zweideutigkeit kann nicht Statt finden, weil man nach dem Obigen weiss, ob $\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)$ gerade oder ungerade ist.

51) $$\begin{cases} A'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)+(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ B'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)-(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ C'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1), \\ D'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta) \end{cases}$$

gesetzt wird:

52) $A=A'(-1)^n$, $B=B'(-1)^{n_1}$, $C=C'(-1)^{n_1}$, $D=D'(-1)^n$.

Setzen wir nun zuerst

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\cot\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

oder

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\tang\tfrac{1}{2}\{\pi-(\Theta-\Theta_1)\},$$

so ist, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=(k+\tfrac{1}{2})\pi-\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1);$$

und weil nun nach 28)

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)=\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

ist, so ist

53) $\varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi$, $\varphi_1=(k+\tfrac{1}{2})\pi-(\Theta-\Theta_1)$,

also nach 50)

54) $\varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi$, $\varphi_1=(k-n+n_1+\tfrac{1}{2})\pi-(\delta-\delta_1)$,

und folglich

55) $$\begin{cases} \sin\varphi=(-1)^k, \cos\varphi=0; \\ \sin\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\cos(\delta-\delta_1), \cos\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\sin(\delta-\delta_1). \end{cases}$$

Zur Bestimmung von x' und y' hat man nun nach 31) und 35) die folgenden Gleichungen:

$$C(x-x')\cos\varphi_1=D(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C(y-y')\sin\varphi_1=D(y_1-y')\sin\varphi;$$

also nach 52)

56) $$\begin{cases} C'(x-x')\cos\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi, \\ C'(y-y')\sin\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 55) ein, so erhält man:

XXVI.

Schreiben des Herrn Professor Ste chen an der École militaire Belgiq zu Brüssel an den Herausgeber.

Je viens maintenant compléter ce que j'ai déjà eu l'honn de vous communiquer sur un cas particulier de l'attraction points matériels par un centre fixe, à l'occasion de quelques p sages de l'ouvrage de Mr. de Pontécoulant. La discuss roulera principalement sur la proposition 32. Nr. 264. pa 103. T. I. de la mécanique d'Euler, intitulée: Mechanica s motus scientia analytice exposita. Petropoli. 17 et surtout il s'agira de redresser quelques inexactitudes, qui trouvent exprimées aux Nr. 269, 270, 271, 272, 273, relatifs proposition citée.

Dans ce qui suit je supposerai le texte latin de l'auteur dev les yeux des lecteurs, et au besoin je pourrais le transcrire le communiquer. Mais comme cela ne nous semble pas nécessa je me bornerai à traduire l'énoncé latin du problème qui forme point de départ d'Euler, et de notre discussion:

Soit C un centre de forces qui attire d'après la loi d'une puissance quelconque des distances; si un corps, d'abord au repos en un point A, vient à être attiré par ce point C, on demande quelle sera sa vitesse en un point quelconque de l'espace $\overline{AC}$?

Pour nous conformer le plus que possible aux notations mêmes du texte, supposons le mobile déjà arrivé de A en P et faisons: $\overline{AP}=x$, $\overline{AC}=a$, $\overline{CP}=y$, partant $a-x=y$.

L'énergie attractive sera censée en raison de la n^{ieme} puissa des distances, et l'on désignera par f la distance à laquelle corps tendrait vers le centre C avec une force égale au poids qu'il aurait, s'il était placé à la surface terrestre; v dénotera vitesse du mobile en P entre A et C, et u sa vitesse variab quand il est arrivé en Q, au dessous du centre C, si toutefois cas est possible. On aura d'après ces notations:

und folglich

$$63)\quad \begin{cases} x_1' = x' + (-1)^{k+n} . r \sin\delta, \\ y_1' = y' + (-1)^{k+n} . r \cos\delta; \end{cases}$$

und

$$64)\quad \begin{cases} x_2' = x' + (-1)^{k+n} . r_1 \sin(\delta - \gamma), \\ y_2' = y' + (-1)^{k+n} . r_1 \cos(\delta - \gamma); \end{cases}$$

welche Formeln keine Zweideutigkeit zulassen, weil man nach dem Obigen weiss, ob $k+n$ gerade oder ungerade ist.

Setzen wir ferner

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) = -\cot \tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)$$

oder

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) = \tang \tfrac{1}{2}\{(\Theta - \Theta_1) - \pi\},$$

so ist, wenn wieder k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) = (k - \tfrac{1}{2})\pi + \tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1);$$

und weil nun nach 28)

$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta_1)$$

ist, so ist

$$65)\quad \varphi = (k - \tfrac{1}{2})\pi + (\Theta - \Theta_1),\ \varphi_1 = (k - \tfrac{1}{2})\pi;$$

also nach 50)

$$66)\quad \varphi = (k + n - n_1 - \tfrac{1}{2})\pi + (\delta - \delta_1),\ \varphi_1 = (k - \tfrac{1}{2})\pi;$$

und folglich

$$67)\quad \begin{cases} \sin\varphi = -(-1)^{k+n-n_1} . \cos(\delta - \delta_1),\ \cos\varphi = (-1)^{k+n-n_1} . \sin(\delta - \delta_1); \\ \sin\varphi_1 = -(-1)^k,\ \cos\varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von x' und y' hat man nun nach 31) und 35) die Gleichungen

$$C(x - x')\cos\varphi_1 = D(x_1 - x')\cos\varphi,$$
$$C(y - y')\sin\varphi_1 = D(y_1 - y')\sin\varphi;$$

also nach 52)

$$68)\quad \begin{cases} C'(x - x')\cos\varphi_1 = (-1)^{n-n_1} . D'(x_1 - x')\cos\varphi, \\ C'(y - y')\sin\varphi_1 = (-1)^{n-n_1} . D'(y_1 - y')\sin\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 67) ein, so erhält man

résultat était évident d'avance. Mais dans ce qui précède nous avons supposé $n+1$ positif; voyons ce qui a lieu pour le cas contraire de $n+1$ négatif. En posant alors $n+1=-m$, m étant un nombre positif, on aura:

$$u^2=\text{Const.}+2g.\frac{f^{m+1}}{m(x-a)^m}.$$

Rémarquons d'abord que conformément aux notations la plus faible valeur de x est ici $x=a$; or en prenant $x=a$, il faut qu'on retrouve la vitesse qui anime le mobile en C, et qui devient infinie d'après la valeur de v, établie pour $n+1$ positif ou négatif. On aura donc: $\infty=\infty+\text{const.}$ et cette égalité se trouve vraie pour une valeur finie quelconque de la constante qui semble ainsi rester inconnue et indéterminée. Mais si l'on considère que la vraie valeur de la vitesse acquise en C n'est pas seulement $\frac{1}{0}$ ou ∞, mais bien $2g.\frac{f^{m+1}}{m}\times\frac{1}{0}-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$, et que c'est cette valeur totale qu'il faut égaler à ce que devient u^2 pour $x=a$, on obtient réellement, en ne négligeant plus le fini par rapport à l'infini: $\text{Const.}=-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$, et cette valeur donne pour u^2:

$$u^2=2g.\frac{f^{m+1}}{m}\left(\frac{1}{(x-a)^m}-\frac{1}{a^m}\right),$$

équation qui exprime le véritable mouvement du point matériel et annonce qu'il y a réellement un mouvement rectiligne alternatif comme pour le cas de $n+1$ positif. Du reste la nécessité du mouvement alternatif se conçoit directement et sans aucun calcul, soit que l'attraction se fusse d'après la raison directe soit qu'elle ait lieu d'après la raison inverse d'une certaine puissance de l'éloignement; en effet dans le 1^r cas le mobile se précipite sur le centre C avec une vitesse finie de C vers Q, et la force alors nulle de ce point C ne saurait lui enlever cette vitesse instantanément. Dans le second cas le mobile se précipite avec une vitesse infinie, et la force du centre quoiqu'infinie alors, ne saurait détruire cette vitesse de C vers Q d'une manière brusque et instantanée et encore moins saurait-il la reproduire en sens contraire de C vers A; cela est aussi évident par la loi de continuité, qu'il est evident qu'une force finie ne saurait imprimer instantanément une vitesse finie à une masse finie. Remarquons encore que dans le cas qui nous occupe les formules générales $dx=vdt$, $vdv=gdx$, etc. ne sont plus applicables au passage du mobile par le centre ni pour ses positions infiniment voisines en deca et au de là de ce point; puisque dans cette étendue de positions la force infiniment grande de C imprime et enlève ensuite au mobile des degrés de vitesse finis à chaque coup.

L'hypothèse sur laquelle nous avons basé l'existence de la vitesse u et de la formule $udu=\ldots$ n'est donc pas même sujette à la moindre difficulté.

$$\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi.$$

nun $n-n_1$ eine gerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned}&+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\&=\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\\&+\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\&=\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\\&-\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}.\end{aligned}$$

il aber in diesem Falle

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n_1}}=(-1)^{n-n_1}=1,$$

$$(-1)^n=(-1)^{n_1}$$

so ist

$$\begin{aligned}&-D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\&=(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\\&+(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\&=(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\\&-(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)};\end{aligned}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)}.$$

nn $n-n_1$ eine ungerade Zahl ist, so kann man

$$\Theta-\Theta_1=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1-\pi)+\tfrac{1}{2}(n-n_1+1)\pi$$

ten, und es ist dann

$$\begin{aligned}&+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\&=-\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}\\&+\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}\end{aligned}$$

$$v^2 = 2gf \cdot \log\left(\frac{a}{y}\right).$$

Or comme cette valeur de $u=0$, pour $x=2a$, il y aura encore ici un mouvement oscillatoire de part et d'autre du centre d'attraction.

Si le mobile, parvenu en C, continue a être poussé par la force du centre, suivant $\overline{AC}$ prolongé vers $\overline{QB}$, on aura:

$$udu = g \cdot f \cdot \left(\frac{dx}{x-a}\right);\ u^2 = 2gf \cdot \log(x-a) + \text{Const.}$$

En déterminant la constante comme précédemment on trouve qu'elle est infinie, de sorte qu'au dessous du centre la vitesse se compose de deux parties, d'une vitesse infinie et d'une vitesse finie qui augmente de plus en plus, mais dont les accroissements vont sans cesse en diminuant. Or c'est là ce que l'on conçoit encore immédiatement et sans faire intervenir le calcul.

Montucla s'est également trompé au sujet de l'attraction des points matériels. Il prétend d'après Newton (histoire des math. t. II. p. 447. et 448.) que dans le cas d'une attraction en raison inverse du quarré de la distance le mobile ne descende pas au dessous du centre, tandisque pour celui de la raison inverse simple il lui attribue un mouvement alternatif.

Profitons de la présente occasion pour expliquer un prétendu paradoxe, remarqué par D'Alembert et qui se rapporte en entier à la matière précédente. Voici en resumé ce qu'expose l'auteur (opuscules math. t. 4. p. 62): „un point matériel A est attiré par un centre C en raison inverse du quarré de la distance: on aura d'après l'auteur et dans les notations admises:

$$v^2 = 2gf^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) \ldots (A)$$

Or si on suppose avec lui qu'au dessous de ce centre la force centripète ne change pas de signe, il s'ensuit que comme x est alors plus grand que a, la valeur de v ou u devient imaginaire, ce qui est dit-il assez paradoxe, puisque la vitesse, qui est infinie au centre, doit ensuite augmenter encore, car lorsque le mobile a passé ce point, il reçoit de nouveaux coups dans le même sens qu'auparavant.“

D'abord nous remarquerons que l'équation en vdv qui a été établie ci-dessus donne en général:

$$v^2 = 2gf^2 \cdot \frac{1}{a-x} + \text{Const.}$$

Si l'on veut avoir la vitesse v, entre A, C, on peut déterminer la constante par la condition de $v=0$, $x=0$ à la fois; ce qui donne en effet la valeur de v^2 de la formule (A). Mais si l'on veut avoir la vitesse du mobile pour une position Q inférieure à C, la précédente détermination de la constante devient vicieuse; car dans l'équation $u^2 = \text{Const.} - 2gf^2 \cdot \frac{1}{x-a}$ il n'est plus permis de la

Bekanntlich hat man aber nach dem Obigen zur Bestimmung von x' und y' die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi;$$

oder, weil in diesem Falle:

$$(-1)^{n-n_1}=1$$

ist:

$$C'(x-x_1)\cos\varphi_1=D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1=D'(y_1-y')\sin\varphi.$$

Führen wir nun in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 79) ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$80)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}=D'(x_1-x')\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ C'(y-y')\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}=D'(y_1-y')\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

aus denen x' und y' bestimmt werden müssen, was nicht die geringste Schwierigkeit hat.

Zur Bestimmung von r benutzen wir wieder die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha=r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha).$$

Weil aber nach 21), 49) und 78)

$$81)\quad \psi=i-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)+\{\lambda-\tfrac{1}{2}(n+n_1)\}\pi,$$

also

$$\varphi-\psi+\alpha=\alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist

$$(y-y')\sin\alpha=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)+n}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}.$$

Es ist aber

$$(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)+n}=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.(-1)^n$$
$$=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.(-1)^{-n}=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)},$$

und folglich

$$82)\quad (y-y')\sin\alpha=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}.$$

Da r immer positiv ist, so ergiebt sich aus dieser Gleichung, aus welcher r bestimmt werden muss, zugleich, ob $\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)$ gerade oder ungerade ist.

Wenn man r hat, so findet man r_1 mittelst der Formel

$$83)\quad r_1=\mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' erhält man die folgenden Gleichungen:

$$84)\quad \begin{cases} x_1' = x' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_1' = y' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

und

$$85)\quad \begin{cases} x_2' = x' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r_1\cos\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_2' = y' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r_1\sin\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo eine Zweideutigkeit nicht vorhanden ist, weil man nach dem Vorhergehenden weiss, ob $\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)$ gerade oder ungerade ist.

Bezeichnen wir den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen die Formel 76) für $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ liefert, durch i_1; so ist nach 75) und 76)

$$\cot i_1 = -\tang i.$$

Jenachdem nun i positiv oder negativ ist, ist der absolute Werth von $i-\frac{1}{2}\pi$ oder $i+\frac{1}{2}\pi$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$; und weil nun

$$\cot(i \mp \tfrac{1}{2}\pi) = -\tang i$$

ist, so ist offenbar

$$86)\quad i_1 = i \mp \tfrac{1}{2}\pi,$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem positiv oder negativ ist.

Ueberhaupt ist nun wieder, wenn λ_1 eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$87)\quad \tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = i_1 + \lambda_1\pi,$$

und weil bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1) + \tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \tfrac{1}{2}(n-n_1-1)\pi$$

ist, so ist

$$88)\quad \begin{cases} \varphi = i_1 + \frac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \{\lambda_1 + \frac{1}{2}(n-n_1-1)\}\pi, \\ \varphi_1 = i_1 - \frac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \{\lambda_1 - \frac{1}{2}(n-n_1-1)\}\pi; \end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass in diesem Falle, wo $n-n_1$ eine ungerade Zahl ist, $\frac{1}{2}(n-n_1-1)$ eine ganze Zahl ist.

Also ist

$$89)\quad \begin{cases} \sin\varphi = (-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\cos\{i_1+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},\\ \cos\varphi = -(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\sin\{i_1+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\};\\ \sin\varphi_1 = -(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\cos\{i_1-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},\\ \cos\varphi_1 = (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\sin\{i_1-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

der nach 86):

$$90)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},\\ \cos\varphi = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\};\\ \sin\varphi_1 = \mp(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},\\ \cos\varphi_1 = \mp(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}\cdot\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Zur Bestimmung von x' und y' haben wir bekanntlich die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}\cdot D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}\cdot D'(y_1-y')\sin\varphi;$$

oder, weil in diesem Falle

$$(-1)^{n-n_1} = -1$$

ist, die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1 = -D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = -D'(y_1-y')\sin\varphi.$$

Führen wir in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 90) ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$91)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(x_1-x')\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},\\ C'(y-y')\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(y_1-y')\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

welche von den Gleichungen 80) nicht verschieden sind. Die Bestimmung von x' und y' mittelst dieser Gleichungen unterliegt keiner Schwierigkeit.

Zur Bestimmung von r benutzen wir auch jetzt die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha).$$

Weil aber nach 21), 49) und 88)

$$92)\quad \psi = i_1 - \tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1-\pi) + \{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}(n+n_1+1)\}\pi,$$

(II)... $p_m - \overset{m}{F}_1 (p-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 (p-2)_{m+2}$ — etc. (usque ad primum term. evanesc.) =

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \left\{ \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \frac{\sin (p+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i-1} (p-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos (p-1+i)\frac{\pi}{3} \right\},$$

dum vero m impar:

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos (p+1+i)\frac{\pi}{3} \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i+1} (p-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \frac{\sin (p+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\}.$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m = 0, 1, 2, 3$, loco formularum (1) — (4), istae:

$$1 - (p-1)_1 + (p-2)_2 - (p-3)_3 + \text{etc.} = \frac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

$$p_1 - 2(p-1)_2 + 3(p-2)_3 + 4(p-3)_4 + \text{etc.}$$
$$= -\tfrac{2}{3} \cdot \left\{ p_1 \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - \frac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\},$$

$$p_2 - 3(p-1)_3 + 6(p-2)_4 - 10(p-3)_5 + \text{etc.}$$
$$= -\tfrac{1}{3} \cdot \left\{ p_2 \cdot \frac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} + 2(p-1)_1 \cos \frac{p\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sin (p+2)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\},$$

$$p_3 - 4(p-1)_4 + 10(p-2)_5 - 20(p-3)_6 + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{2}{9} \cdot \left\{ p_3 \cdot \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - 2(p-1)_2 \frac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right.$$
$$\left. + \tfrac{10}{3}(p-2)_1 \cos (p+2)\frac{\pi}{3} - \tfrac{10}{3} \cdot \frac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\}.$$

Aus den Gleichungen 82) und 93), welche für r offenbar ganz denselben Werth liefern, erhellet, dass

$$(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} \text{ und } \pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem i positiv oder negativ ist, stets gleiche Vorzeichen haben. Und da nun auch die Gleichungen 83) und 94) für r_1 ganz denselben Werth liefern, so erhält man offenbar auch für x_1, y_1' und x_2', y_2' aus den Gleichungen 84), 85) und 95), 96) ganz dieselben Werthe.

Daher führen überhaupt die Formeln 75) und 76) ganz zu denselben Werthen von x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2'; und man braucht also in allen Fällen bloss die erste dieser beiden Formeln anzuwenden, d. h. bloss

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

oder, wenn der absolute Werth von i nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, bloss

$$97)\quad \tang i=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

zu setzen.

Diese Gleichung kann man auch auf die Form

$$98)\quad \tang i=\frac{\frac{y-y_1}{x-x_1}+\frac{C'+D'}{C'-D'}\tang\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{1-\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{C'+D'}{C'-D'}\tang\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

bringen; und berechnet man nun die Hülfswinkel Ω und Ω_1 mittelst der Formeln

$$99)\quad \tang\Omega=\frac{y-y_1}{x-x_1},\ \tang\Omega_1=\frac{C'+D'}{C'-D'}\tang\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1);$$

so erhält man nach einem bekannten goniometrischen Satze:

$$100)\quad \tang i=\tang(\Omega+\Omega_1).$$

Mittelst dieser Formeln kann i ohne Schwierigkeit gefunden werden. Hat man aber i, so werden mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln auch die gesuchten Coordinaten x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2' leicht gefunden, was nun keiner weiteren Erläuterung bedarf.

(II)....$p_m - \overset{m}{F}_1 (p-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 (p-2)_{m+2} - \text{etc.}$ (usque ad primum term. evanesc.) $=$

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \frac{\sin (p+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ \qquad + 2 \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i-1} (p-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos (p-1+i)\frac{\pi}{3} \end{array} \right\},$$

dum vero m impar:

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle 2 \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos (p+1+i)\frac{\pi}{3} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i+1} (p-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \frac{\sin (p+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \end{array} \right\}.$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m = 0, 1, 2, 3$, loco formularum (1) — (4), istae:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - (p-1)_1 + (p-2)_2 - (p-3)_3 + \text{etc.} = \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}, \\ p_1 - 2(p-1)_2 + 3(p-2)_3 + 4(p-3)_4 + \text{etc.} \\ \qquad = -\tfrac{2}{3} \cdot \left\{ p_1 \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - \dfrac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\}, \\ p_2 - 3(p-1)_3 + 6(p-2)_4 - 10(p-3)_5 + \text{etc.} \\ \qquad = -\tfrac{1}{3} \cdot \left\{ p_2 \cdot \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} + 2(p-1)_1 \cos \frac{p\pi}{3} + 2 \cdot \dfrac{\sin (p+2)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\}, \\ p_3 - 4(p-1)_4 + 10(p-2)_5 - 20(p-3)_6 + \text{etc.} \\ \qquad = \tfrac{2}{9} \cdot \left\{ p_3 \cdot \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - 2(p-1)_2 \dfrac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right. \\ \qquad \left. + \tfrac{10}{3} (p-2)_1 \cos (p+2)\frac{\pi}{3} - \tfrac{10}{3} \cdot \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\}. \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.\frac{(a-x)^n}{f^n} \text{ ou } vdv=g.\frac{(a-x)^n}{f}.dx \text{ entre } A,C;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.\frac{(x-a)^n}{f^n} \text{ ou } udu=-g.\frac{(x-a)^n}{f^n}.dx;$$

désignant dans ces deux dernières équations la distance du bile à son point de départ, c'est-à-dire la ligne $\overline{AQ}$, tandis que ns le 1^r cas $x=\overline{AP}$.

Si l'on intègre la valeur de vdv et que l'on détermine la conte d'après la condition de $v=0$, pour $x=0$, on obtiendra.

$$v^2=2g.\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n} \text{ ou } 2g.\frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1).f^n},$$

uation, qui devient identique au résultat d'Euler, si l'on convient ec lui de mesurer la vitesse par la racine-quarrée de la hauteur e, ce qui revient à prendre pour unité de vitesses la quantité ou le double de l'accélération de la pesanteur terrestre. Mais marquons en passant que plus tard dans sa mécanique des corps ides l'auteur a renoncé à cette manière de mesurer les vitesses ur établir des conventions aujourd'hui plus généralement adopes et plus commodes, quoiqu'un peu plus longues.

En intégrant la valeur de udu établie plus haut, on a

$$u^2=\text{Const.}-2g.\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

quation dans laquelle la constante amenée par l'intégration exprime videmment la vitesse du mobile, parvenu au centre d'attraction même. Mais cette vitesse doit se déduire aussi de la valeur de v, n y prenant $y=0$, ce qui donnera parconséquent:

$$\text{Constante}=2g.\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

$$\text{et partant: } u^2=2g.\frac{a^{n+1}-(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Ainsi la plus grande valeur de $x>a$ est $x=2a$, de sorte que le mobile se meut d'un mouvement rectiligne alternatif de A en C de C en B pour $\overline{CB}=\overline{CA}$, et puis de B en A, et qu'il a des vitesses égales de part et d'autre du centre d'attraction C; c'est ce que démontre la comparaison des valeurs de v, u. Mais si le mobile, arrivé une 1re fois en C, se trouvait repoussé de C en Q, c'est-à-dire si la force centripète continuait à agir sur lui dans le même sens, les accroissements élémentaires du, dx seraient de même signe au dessous de C, et l'on aurait dès lors:

$$u^2=2g.\frac{a^{n+1}+(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Ainsi la vitesse du mobile irait constamment en croissant C vers Q, depuis sa valeur en C jusqu'à l'infini; et un tel

résultat était évident d'avance. Mais dans ce qui précède nous avons supposé $n+1$ positif; voyons ce qui a lieu pour le cas contraire de $n+1$ négatif. En posant alors $n+1=-m$, m étant un nombre positif, on aura:

$$u^2=\text{Const.}+2g.\frac{f^{m+1}}{m(x-a)^m}.$$

Rémarquons d'abord que conformément aux notations la plus faible valeur de x est ici $x=a$; or en prenant $x=a$, il faut qu'on retrouve la vitesse qui anime le mobile en C, et qui devient infinie d'après la valeur de v, établie pour $n+1$ positif ou négatif. On aura donc: $\infty=\infty+\text{const.}$ et cette égalité se trouve vraie pour une valeur finie quelconque de la constante qui semble ainsi rester inconnue et indéterminée. Mais si l'on considère que la vraie valeur de la vitesse acquise en C n'est pas seulement $\frac{1}{0}$ ou ∞, mais bien $2g.\frac{f^{m+1}}{m}\times\frac{1}{0}-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$, et que c'est cette valeur totale qu'il faut égaler à ce que devient u^2 pour $x=a$, on obtient réellement, en ne négligeant plus le fini par rapport à l'infini: $\text{Const.}=-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$, et cette valeur donne pour u^2:

$$u^2=2g.\frac{f^{m+1}}{m}\left(\frac{1}{(x-a)^m}-\frac{1}{a^m}\right),$$

équation qui exprime le véritable mouvement du point matériel et annonce qu'il y a réellement un mouvement rectiligne alternatif comme pour le cas de $n+1$ positif. Du reste la nécessité du mouvement alternatif se conçoit directement et sans aucun calcul, soit que l'attraction se fusse d'après la raison directe soit qu'elle ait lieu d'après la raison inverse d'une certaine puissance de l'éloignement; en effet dans le 1^r cas le mobile se précipite sur le centre C avec une vitesse finie de C vers Q, et la force alors nulle de ce point C ne saurait lui enlever cette vitesse instantanément. Dans le second cas le mobile se précipite avec une vitesse infinie, et la force du centre quoiqu'infinie alors, ne saurait détruire cette vitesse de C vers Q d'une manière brusque et instantanée et encore moins saurait-il la reproduire en sens contraire de C vers A; cela est aussi évident par la loi de continuité, qu'il est evident qu'une force finie ne saurait imprimer instantanément une vitesse finie à une masse finie. Remarquons encore que dans le cas qui nous occupe les formules générales $dx=vdt$, $vdv=gdx$ etc. ne sont plus applicables au passage du mobile par le centre ni pour ses positions infiniment voisines en deca et au de là de ce point; puisque dans cette étendue de positions la force infiniment grande de C imprime et enlève ensuite au mobile des degrés de vitesse finis à chaque coup.

L'hypothèse sur laquelle nous avons basé l'existence de la vitesse u et de la formule $udu=....$ n'est donc pas même sujette à la moindre difficulté.

Wir multipliziren diese Gleichung mit dx und integriren sie zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$. Es ergiebt sich so

$$2\cos at\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx - 2a\sin at\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx,$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned} &-2\cos at.\frac{du}{dt}-2a\sin at.u \\ &=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx \end{aligned}\right\} (3)$$

Könnte man nun hier den Werth der rechten Seite für sich ausfindig machen, so wäre das Problem der Entwickelung des Werthes von u auf die Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zurückgeführt. Es hat aber nicht die mindeste Schwierigkeit, den Werth der rechten Seite von Nr. (3) zu finden. Setzt man nämlich in dem ersten dieser Integrale $x-a=y$ und im zweiten $x+a=z$, so ergiebt sich sehr leicht:

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz,$$

oder durch Zerlegung

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz;$$

und da in einem bestimmten Integrale nichts auf die Wahl des Integrationsbuchstabens ankommt:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy+2\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz. \qquad (4)$$

Man hat aber weiter

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=\int_{-a}^{0}\frac{\sin ty}{y}dy+\int_0^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy;$$

und wenn man im ersten Integrale $y=-z$, im zweiten $y=z$ setzt:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=-\int_{+a}^{0}\frac{\sin tz}{z}dz+\int_0^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz;$$

oder durch Vertauschung der Integrationsgränzen im ersten Integral, wodurch dasselbe positiv wird,

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=2\int_0^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz.$$

$$v^2 = 2gf \cdot \log\left(\frac{a}{y}\right).$$

Or comme cette valeur de $u=0$, pour $x=2a$, il y aura encore ici un mouvement oscillatoire de part et d'autre du centre d'attraction.

Si le mobile, parvenu en C, continue a être poussé par la force du centre, suivant $\overline{AC}$ prolongé vers $\overline{QB}$, on aura:

$$udu = g \cdot f \cdot \left(\frac{dx}{x-a}\right);\ u^2 = 2gf \cdot \log(x-a) + \text{Const.}$$

En déterminant la constante comme précédemment on trouve qu'elle est infinie, de sorte qu'au dessous du centre la vitesse se compose de deux parties, d'une vitesse infinie et d'une vitesse finie qui augmente de plus en plus, mais dont les accroissements vont sans cesse en diminuant. Or c'est là ce que l'on conçoit encore immédiatement et sans faire intervenir le calcul.

Montucla s'est également trompé au sujet de l'attraction des points matériels. Il prétend d'après Newton (histoire des math. t. II. p. 447. et 448.) que dans le cas d'une attraction en raison inverse du quarré de la distance le mobile ne descende pas au dessous du centre, tandisque pour celui de la raison inverse simple il lui attribue un mouvement alternatif.

Profitons de la présente occasion pour expliquer un prétendu paradoxe, remarqué par D'Alembert et qui se rapporte en entier à la matière précédente. Voici en resumé ce qu'expose l'auteur (opuscules math. t. 4. p. 62): „un point matériel A est attiré par un centre C en raison inverse du quarré de la distance: on aura d'après l'auteur et dans les notations admises:

$$v^2 = 2gf^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) \ldots (A)$$

Or si on suppose avec lui qu'au dessous de ce centre la force centripète ne change pas de signe, il s'ensuit que comme x est alors plus grand que a, la valeur de v ou u devient imaginaire, ce qui est dit-il assez paradoxe, puisque la vitesse, qui est infinie au centre, doit ensuite augmenter encore, car lorsque le mobile a passé ce point, il reçoit de nouveaux coups dans le même sens qu'auparavant.“

D'abord nous remarquerons que l'équation en vdv qui a été établie ci-dessus donne en général:

$$v^2 = 2gf^2 \cdot \frac{1}{a-x} + \text{Const.}$$

Si l'on veut avoir la vitesse v, entre A, C, on peut déterminer la constante par la condition de $v=0$, $x=0$ à la fois; ce qui donne en effet la valeur de v^2 de la formule (A). Mais si l'on veut avoir la vitesse du mobile pour une position Q inférieure à C, la précédente détermination de la constante devient vicieuse; car dans l'équation $u^2 = \text{Const.} - 2gf^2 \cdot \frac{1}{x-a}$ il n'est plus permis de l=

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cos at - aC\sin at,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos at + aC\sin at. \tag{7}$$

Um noch die Constante C zu bestimmen, setzen wir in (6) $t=0$, woraus sich ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a} l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \text{Const.},$$

folglich

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = 0.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichungen (6) und (7) und schreiben zugleich b für t, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx = -\frac{\pi}{2a}\sin ab, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos ab. \tag{9}$$

Zu bemerken ist noch, dass man in der ersten Gleichung a nicht $=0$ nehmen darf, weil für diesen Fall die Bestimmung der Constante sich ändert. Es wird dann

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

und also nicht mehr $=0$. Ebenso darf man b (das frühere t) nicht negativ nehmen, weil die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tz}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

für negative t ihre Gültigkeit verliert.

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete der perspektivischen Projektion.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betrachtung der perspektivischen Projektionen verschiedener Gebilde gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschiedener Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen auf metrische Relationen. In der That ist die harmonische Proportion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht gestört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden ist wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Strahlbüschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion mehr oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind aber oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es nicht ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elementaren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander senkrechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen wollen. Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein beliebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welchem der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projektion des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, ziehen wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und setzen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die Lage des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=X$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, P eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht stehenden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coordinaten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

m_0, $(m+1)_1$, $(m+2)_2$, $(m+3)_3$, etc.

atque n numerum integrum quemlibet, habetur dum m par est aut 0:

$$(I)\ldots. 1.(n+m)_m - \overset{m}{F}_1(n+m-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2(n+m-2)_{m+2} - \text{etc.}$$

(usque ad primum terminum evanescentem) $=$

$$= (\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i}(n+m-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \frac{\sin(n-\frac{m}{2}+i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\},$$

$$+ 2S_{i=1}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i-1}(n+m-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos(n-\frac{m}{2}+i-1)\frac{\pi}{3} \Big\}.$$

dum vero m impar:

$$= (\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i+1}(n+m-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \frac{\sin(n-\frac{m-1}{2}+i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\}.$$

$$+ 2S_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i}(n+m-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos(n-\frac{m-1}{2}+i-1)\frac{\pi}{3} \Big\}$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m=0, 1, 2, 3$ formulae illae (1) et (2) ac praeterea

$$(3)\ldots. 1.(n+2)_2 - 3(n+1)_3 + 6n_4 - 10(n-1)_5 + \text{etc.} =$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \left\{ (n+2)_2 \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 2(n+1)_1 \cos(n-1)\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\},$$

$$(4)\ldots. 1.(n+3)_3 - 4(n+2)_4 - 10(n+1)_5 + 20n_6 - \text{etc.} =$$

$$= \tfrac{2}{9} \left\{ (n+3)_3 \cos(n-2)\frac{\pi}{3} + 2(n-2)_2 \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right.$$

$$\left. + \tfrac{10}{3}(n+1)_1 \cos(n-1)\frac{\pi}{3} + \tfrac{10}{3} \cdot \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\}.$$

2. Quod cum Theorema (uti licet probari) etiamsi $n=0$ fuerit, saltem nisi eodem tempore $m=0$, valet; corollarii instar ex eo consequitur haberi, p denotante num. integrum $= \text{aut} > m$,

dum m par est aut 0:

---

al. (T. XII.) dudum perscripto connexa esset quodammodo. Typis r tandem in To. sequenti impressam Theorematis, de quo quaeritur onstrationem in hoc „Archivo“ condendam offeremus.

wir daher bei unveränderten u, t, X bloss Y sich ändern, so wird P als Endpunkt von MP eine Gerade beschreiben, welche der Grundlinie mn in der Entfernung MP parallel läuft. Dabei wird sich nun nach Formel (2) y ändern, aber nach Formel (1) x immer constant bleiben, d. h. der Endpunkt p der Geraden x wird eine Gerade beschreiben, welche der mn in der Entfernung Np parallel geht. Also: die Projektion einer Parallelen zur Grundlinie ist wieder eine solche Parallele.

Um nun auch die Projektionen anderer Geraden, welche der Grundlinie nicht parallel laufen, sondern einen beliebigen Winkel mit ihr machen, aufzufinden, brauchen wir bloss die Projektionen zweier auf ihr liegender Punkte aufzusuchen und die gefundenen durch eine Gerade zu verbinden. Denn man übersieht leicht, dass die Projektion einer Geraden selbst eine Gerade sein muss.

Es schneide nun die Gerade CP (Taf. III. Fig. 3.) die Grundlinie mn unter dem Winkel $PCM=\varphi$, wobei wir C als Anfangs-, P als Endpunkt der Geraden betrachten, so ist C die Projektion seiner selbst, weil dieser Punkt beiden Ebenen (E) und (e) zugleich angehört, und es handelt sich folglich bloss noch um die Projektion p des Endpunktes der Geraden, dessen Coordinaten X und Y wir jetzt durch den Winkel φ auszudrücken haben. Setzen wir demnach $Cv=k$, $CP=z$, so ist:

$$MP=X=z\sin\varphi,\quad Mv=Y=k+z\cos\varphi.$$

Durch diese Substitutionen erhält man aus den Formeln (1) u. (2):

$$x=\frac{uz\sin\varphi}{t+z\sin\varphi}=u-\frac{ut}{t+z\sin\varphi},$$

$$y=\frac{tk+tz\cos\varphi}{t+z\sin\varphi}=t\cot\varphi+\frac{kt-t^2\cot\varphi}{t+z\sin\varphi}.$$

Lassen wir jetzt z in's Unendliche wachsen, d. h. die Linie CP in's Unendliche fortlaufen, und gehen zur Gränze für $z=\infty$ über, so erhalten wir

$$x=u,\quad y=t\cot\varphi, \tag{5}$$

d. h. geometrisch, die Projektion eines unendlich entfernten Punktes liegt auf einer durch o zu mn parallel gelegten Geraden, dem sogenannten Horizont, und die Projektion der unendlichen Geraden CPQ ist die endliche Gerade Cq. Der Punkt q wird gefunden, wenn man aus O eine Parallele zu CQ zieht, welche dem Horizonte im Punkte q begegnet.

Es ist noch zu bemerken, dass in den Formeln (5) das anfangs eingeführte $k=Cv$ nicht mehr vorkommt, dass mithin diese Entfernung auf die Lage des Punktes q gar keinen Einfluss hat. Ziehen wir daher in verschiedenen Entfernungen Cv, $C'v$, $C''v$, etc. die Geraden CQ, $C'Q'$, $C''Q''$, etc., so müssen die Projektionen derselben die Geraden Cq, $C'q$, $C''q$, etc. sein, d. h. die Projektionen einer Reihe von Parallellinien, welche die Grundlinie unter einem beliebigen Winkel >0 schneiden, bilden einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt im Horizonte liegt.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Nimmt man nämlich in den Formeln (3) und (4) $x=u$, so werden $X=Y=\infty$, so dass der Endpunkt Q der Geraden CPQ im Unendlichen liegt; zugleich ist aber auch

$$\frac{X}{Y}=\frac{tx}{uy}=\frac{tu}{uy}=\frac{t}{y}. \qquad (6)$$

Wenn also $\frac{t}{y}=\frac{Oo}{oq}=\tan Ooq=\tan\varphi$ gesetzt wird, so ist auch $\frac{X}{Y}=\tan\varphi$, mithin W. PCM = W. Oqo. Zieht man demnach beliebige Linien qC, qC', qC'', etc. und $CQ \parallel C'Q' \parallel C''Q''$ etc., welche die Grundlinie sämmtlich unter dem Winkel $\varphi=\text{Arctan}\frac{t}{y}$ schneiden, so kann man wieder die letzteren als Projektionen der ersteren ansehen.

Unter den Werthen, welche φ haben kann, sind besonders zwei von Wichtigkeit.

Für $\varphi=90^0$ erhält man nämlich nach (5)

$$x=u,\ y=0.$$

Diese x und y sind die Coordinaten des Punktes o, welchen man in der Perspektive den Augenpunkt zu nennen pflegt; also: die Projektionen aller Geraden, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen, vereinigen sich im Augenpunkte.

Ferner ist für $\varphi=45^0$

$$x=u,\ y=t.$$

Durch diese Coordinaten wird ein Punkt v bestimmt, welcher auf dem Horizonte in der Entfernung $ov=Oo=t$ liegt. Man nennt ihn den Distanzpunkt. Also: die Projektionen aller Geraden, welche die Grundlinie unter einem halben Rechten schneiden, vereinigen sich im Distanzpunkte.

Hieraus ergiebt sich das gewöhnliche, sehr bekannte Verfahren zur Aufsuchung der perspektivischen Projektion eines gegebenen Punktes. Man denke sich zunächst die Ebene (E) (Taf. III. Fig. 4.) um 90^0 nach unten zu um mn herumgedreht, so dass sie mit der Verlängerung von (e) zusammenfällt, sei ferner o der Augen-, v der Distanzpunkt und in der Ebene (E) der Punkt P gegeben, dessen Projektion p gesucht wird, so verfahre man folgendermassen.

Man fälle von P auf die Grundlinie mn die Senkrechte PM und mache $MP'=MP$. Darauf ziehe man nach dem Augenpunkte die Gerade Mo, nach dem Distanzpunkte die Gerade $P'v$, so ist der Durchschnitt p beider Geraden die gesuchte Projektion des Punktes P. Denn die Gerade Mo ist die Projektion der ins Unendliche verlängert gedachten MP, $P'v$ die der ebenfalls ins Unendliche verlängerten PM; folglich der Durchschnitt von Mo und $P'v$ die Projektion des Durchschnittes von MP und PM, d. h. des Punktes P.

Diese Construktion lässt sich eben so leicht umkehren, wenn man nämlich P sucht, sobald p gegeben ist. Man zieht dann die Geraden op und vp, verlängert sie, bis sie die Grundlinie mn in

XXVIII.

Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx$ und $\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{x^2-a^2}dx$.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Man kann die Werthe der beiden obigen Integrale leicht mi telst des von Laplace vorzüglich angewendeten Kunstgriffes en wickeln, welcher darin besteht, dass man dieselben in irgend ei Relation zu bringen sucht, die sich durch die Bemerkung, da das zweite aus dem ersten durch eine Differenziation abgeleit werden kann, in eine Differenzialgleichung verwandelt, durch der Integration man dann die Werthe der Integrale bekommt. Die Methode lässt sich hier in folgender sehr einfacher Weise a wenden.

Sei zuvörderst

$$u=\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx,$$

so folgt durch beiderseitige Differenziation nach t, welches a unabhängig veränderlich angesehen wird,

$$\frac{du}{dt}=-\int_0^\infty \frac{x \sin tx}{x^2-a^2}dx.$$

Um nun noch eine zweite Beziehung zwischen den beiden fra lichen Integralen zu entdecken, wenden wir uns an die identisch Gleichung

$$2\cos at\frac{x\sin tx}{x^2-a^2}-2a\sin at\frac{\cos tx}{x^2-a^2}=\frac{\sin t(x-a)}{x-a}+\frac{\sin t(x+a)}{x+a},$$

von deren Richtigkeit man sich leicht dadurch überzeugt, da man auf der rechten Seite Alles auf den gleichen Nenner x^2- bringt und dann die Funktionen $\sin t(x-a)$ und $\sin t(x+a)$ zerleg

Wir multipliziren diese Gleichung mit dx und integriren sie zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$. Es ergiebt sich so

$$2\cos at\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx-2a\sin at\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx,$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned}&-2\cos at.\frac{du}{dt}-2a\sin at.u\\&=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx\end{aligned}\right\}(3)$$

Könnte man nun hier den Werth der rechten Seite für sich ausfindig machen, so wäre das Problem der Entwickelung des Werthes von u auf die Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zurückgeführt. Es hat aber nicht die mindeste Schwierigkeit, den Werth der rechten Seite von Nr. (3) zu finden. Setzt man nämlich in dem ersten dieser Integrale $x-a=y$ und im zweiten $x+a=z$, so ergiebt sich sehr leicht:

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz,$$

oder durch Zerlegung

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz;$$

und da in einem bestimmten Integrale nichts auf die Wahl des Integrationsbuchstabens ankommt:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy+2\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz. \qquad (4)$$

Man hat aber weiter

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy=\int_{-a}^{0} \frac{\sin ty}{y}dy+\int_0^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy;$$

und wenn man im ersten Integrale $y=-z$, im zweiten $y=z$ setzt:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy=-\int_{+a}^{0} \frac{\sin tz}{z}dz+\int_0^{+a} \frac{\sin tz}{z}dz;$$

oder durch Vertauschung der Integrationsgränzen im ersten Inte-
—', wodurch dasselbe positiv wird,

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin ty}{y}dy=2\int_0^{+a} \frac{\sin tz}{z}dz.$$

Substituiren wir diess in Nr. (4), so ist jetzt der Werth der re
ten Seite in (3) gleich

$$2\left\{\int_0^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz+\int_{+a}^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz\right\}=2\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz.$$

Man kennt aber die Formel

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man darin $x=tz$, so erhält man unter der Voraussetz
eines positiven t *)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz=\frac{\pi}{2},$$

und mithin ist der Werth der rechten Seite von (3) $=\pi$. So wird

$$-\cos at.\frac{du}{dt}-a\sin at.u=\frac{\pi}{2}.$$

Um diese Differenzialgleichung zu integriren, setzen wir

$$u=\cos at.v,$$

wo v eine noch unbekannte Funktion von t bedeutet, wodurch s
ergiebt

$$-\cos at(\cos at.\frac{dv}{dt}-a\sin at.v)-a\sin at\cos at.v=\frac{\pi}{2},$$

oder einfacher

$$-\cos^2 at.\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{2},$$

mithin

$$v=-\frac{\pi}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 at}=-\frac{\pi}{2}.\frac{\tan at}{a}+C,$$

indem C die Integrationsconstante bezeichnet. Nach (5) ist

$$u=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at,$$

oder nach Nr. (1)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at;$$

und ebenso ist

---

*) Für negative t werden nämlich die Integrationsgränzen: 0
$-\infty$ statt 0 und $+\infty$.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cos at - aC\sin at,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos at + aC\sin at. \tag{7}$$

Um noch die Constante C zu bestimmen, setzen wir in (6) $t=0$, woraus sich ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a} l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \text{Const.},$$

folglich

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = 0.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichungen (6) und (7) und schreiben zugleich b für t, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx = -\frac{\pi}{2a}\sin ab, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos ab. \tag{9}$$

Zu bemerken ist noch, dass man in der ersten Gleichung a nicht $=0$ nehmen darf, weil für diesen Fall die Bestimmung der Constante sich ändert. Es wird dann

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

und also nicht mehr $=0$. Ebenso darf man b (das frühere t) nicht negativ nehmen, weil die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tz}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

für negative t ihre Gültigkeit verliert.

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete d perspektivischen Projektion.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betra tung der perspektivischen Projektionen verschiedener Gebi gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschie ner Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen metrische Relationen. In der That ist die harmonische Prop tion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht stört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Stra büschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion m oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind a oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es ni ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elem taren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander se rechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen woll Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein liebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welch der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projekti des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, zieh wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und s zen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die La des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht st nden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coo aten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

$$PM : MN = Vv : vN,$$

d. i.

$$X : Y - y = t : y,$$

woraus man findet

$$y = \frac{tY}{t+X}.$$

Nun ist auch

$$Vv : PM = VN : PN,$$

d. i.

$$t : X = VN : PN;$$

mithin

$$t + X : X = VN + PN : PN$$
$$= VP : PN.$$

Aus $\Delta OVP \sim \Delta pNP$ fliesst aber:

$$VP : PN = OV : pN$$
$$= u : x.$$

Substituirt man diese Proportion in die vorhergehende, so hat man:

$$t + X : X = u : x,$$

folglich

$$x = \frac{uX}{t+X}.$$

Aus den beiden gefundenen Formeln:

$$x = \frac{uX}{t+X}, \tag{1}$$

$$y = \frac{tY}{t+X} \tag{2}$$

kann man leicht auch die umgekehrten

$$X = \frac{tx}{u-x}, \tag{3}$$

$$Y = \frac{uy}{u-x} \tag{4}$$

ableiten, und zwar (3) aus (1) und dann (4) aus (2) und (3).

Mit Hülfe der Formeln (1) und (2) kommt man von den Gebilden der Ebene (E) auf die der Ebene (e) und durch die folgenden (3), (4) von diesen auf jene. Bemerkenswerth ist noch, dass in dem Ausdrucke für x die Ordinate Y nicht vorkommt. Lassen

XXX.

Einige neue Beweise von Lehrsätzen aus der Elementar-Stereometrie.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Die Lehre vom Rauminhalt der Körper ist bekanntlich auf den Satz gegründet, dass zwei dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleichen Rauminhalt haben. Die Beweise dieses Lehrsatzes, welche bisher bekannt sind, sind aber solche, die mehr in das Gebiet der höhern, als in das der Elementarmathematik gehören, sogenannte Exhaustionsbeweise. Einer von diesen Beweisen ist der in den Gerlingschen Ausgaben der reinen Mathematik von Lorenz enthaltene.

Aufmerksam gemacht durch Gauss, dass es wünschenswerth sei, diesen Beweis durch einen mehr elementaren zu ersetzen, dass man bis jetzt nicht einmal einen elementaren Beweis für den Satz besitze, dass dreiseitige Pyramiden, die einander gegenbildlich gleich sind, d. h. sich wie rechts und links verhalten, gleichen Rauminhalt haben, beschäftigte sich Gerling mit diesen Aufgaben. Er fand für die Gleichheit der Grösse zweier gegenbildlich gleichen Pyramiden einen den Anforderungen genügenden Beweis und seine Mittheilung darüber ist die Veranlassung, dass auch ich mich mit dem fraglichen Gegenstand beschäftigte, da der von Gerling gefundene Beweis mir ein zu complicirter zu sein schien. — Ich halte es für angemessen, das bei dieser Gelegenheit von mir Gefundene dem mathematischen Publikum vorzulegen.

Ich setze voraus, dass folgende Sätze bereits bewiesen seien:

1) Parallelepipede, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind gleich gross.

2) Ein gerades dreiseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds, dessen Grundfläche doppelt so gross als die des dreiseitigen Prismas ist und dessen Höhe gleich der des Prismas ist.

3) Jedes schiefe dreiseitige Prisma (Taf. IV. Fig. 2 *A*.) lässt sich umwandeln in ein gerades (Taf. IV. Fig. 2 *B*.) von demselben Querschnitt und ebenso grosser Länge der Seitenkante.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Nimmt man nämlich in den Formeln (3) und (4) $x=u$, so werden $X=Y=\infty$, so dass der Endpunkt Q der Geraden CPQ im Unendlichen liegt; zugleich ist aber auch

$$\frac{X}{Y}=\frac{tx}{uy}=\frac{tu}{uy}=\frac{t}{y}. \qquad (6)$$

Wenn also $\frac{t}{y}=\frac{Oo}{oq}=\tan Ooq=\tan\varphi$ gesetzt wird, so ist auch $\frac{X}{Y}=\tan\varphi$, mithin W. PCM = W. Oqo. Zieht man demnach beliebige Linien qC, qC', qC'', etc. und $CQ \parallel CQ' \parallel CQ''$ etc., welche die Grundlinie sämmtlich unter dem Winkel $\varphi=\text{Arctan}\frac{t}{y}$ schneiden, so kann man wieder die letzteren als Projektionen der ersteren ansehen.

Unter den Werthen, welche φ haben kann, sind besonders drei von Wichtigkeit.

Für $\varphi=90^0$ erhält man nämlich nach (5)

$$x=u,\ y=0.$$

Diese x und y sind die Coordinaten des Punktes o, welchen man in der Perspektive den Augenpunkt zu nennen pflegt; also: die Projektionen aller Geraden, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen, vereinigen sich im Augenpunkte.

Ferner ist für $\varphi=45^0$

$$x=u,\ y=t.$$

Durch diese Coordinaten wird ein Punkt v bestimmt, welcher auf dem Horizonte in der Entfernung $ov=Oo=t$ liegt. Man nennt ihn den Distanzpunkt. Also: die Projektionen aller Geraden, welche die Grundlinie unter einem halben Rechten schneiden, vereinigen sich im Distanzpunkte.

Hieraus ergiebt sich das gewöhnliche, sehr bekannte Verfahren zur Aufsuchung der perspektivischen Projektion eines gegebenen Punktes. Man denke sich zunächst die Ebene (E) (Taf. III. Fig. 4.) um 90^0 nach unten zu um mn herumgedreht, so dass sie mit der Verlängerung von (e) zusammenfällt, sei ferner o der Augen-, v der Distanzpunkt und in der Ebene (E) der Punkt P gegeben, dessen Projektion p gesucht wird, so verfahre man folgendermassen.

Man fälle von P auf die Grundlinie mn die Senkrechte PM und mache $MP'=MP$. Darauf ziehe man nach dem Augenpunkte die Gerade Mo, nach dem Distanzpunkte die Gerade $P'v$, so ist der Durchschnitt p beider Geraden die gesuchte Projektion des Punktes P. Denn die Gerade Mo ist die Projektion der ins Unendliche verlängert gedachten MP, $P'v$ die der ebenfalls ins Unendliche verlängerten $P'M$; folglich der Durchschnitt von Mo und $P'v$ die Projektion des Durchschnittes von MP und $P'M$, d. h. des Punktes P.

Diese Construktion lässt sich eben so leicht umkehren, wenn nämlich P gesucht, sobald p gegeben ist. Man zieht dann die Linien op und vp, verlängert sie, bis sie die Grundlinie mn in

M und P' schneiden, errichtet dann in M eine Senkrechte auf mn, und nimmt $MP = MP'$, so ist der Punkt P gefunden, dessen Projektion p sein soll. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun verschiedene metrische Relationen untersuchen, welche zwischen den Gebilden der beiden Ebenen (E) und (e) statt finden.

§. 3.

Es sei in der Ebene (e) ein Viereck $abcd$ (Taf. III. Fig. 5.) gegeben, dessen Gegenseitendurchschnitte p und q heissen mögen. Nehmen wir die Linie pq als Horizont und ziehen beliebig die Grundlinie $mn \| pq$, so müssen, wo man auch den Augenpunkt o in pq annehmen möge, die Linien ab und cd die Projektionen solcher Geraden sein, welche in (E) einander parallel laufen, weil sich der Durchschnitt p von ab und cd auf dem Horizonte befindet. Das Nämliche wird auch von den Linien ad und bc gelten, so dass also die Figur $ABCD$ in (E), als deren Projektion man sich $abcd$ denken kann, durch parallele Gegenseiten begränzt wird, d. h. ein Parallelogramm ist. Diess gilt für jede Distanz ov; legt man aber dem in (E) befindlichen Parallelogramme besondere Bedingungen auf, so bleibt auch die Distanz nicht mehr willkührlich, wie man sogleich sehen wird.

1) Man verlangt, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck werde.

Es sei der Augenpunkt o willkührlich zwischen p und q genommen, $op = y$, $oq = y'$, die erst noch zu bestimmende Distanz $ov = t$, W. $CA'D = \varphi$ und W. $A'CD = \varphi'$, so ist nach Formel (6) und dem Folgenden

$$\frac{t}{y} = \tan\varphi, \quad \frac{t}{y'} = \tan\varphi'.$$

Da aber $ABCD$ ein Rechteck sein soll, so muss $\varphi' = 90^0 - \varphi$ sein, mithin:

$$\frac{t}{y} = \tan\varphi, \quad \frac{t}{y'} = \cot\varphi;$$

woraus man durch Multiplikation erhält:

$$t^2 = yy', \quad t = \sqrt{yy'}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass zwar o beliebig genommen werden darf, dass aber dann die Distanz ov die mittlere Proportional zwischen op und oq sein muss. Beschreibt man also über pq als Durchmesser einen Halbkreis, so ist, für o als Augenpunkt, die Ordinate $os = ov$ genommen die nöthige Distanz und v der Distanzpunkt.

2) Soll $ABCD$ ein Rhombus werden, so müssen sich die Diagonalen AC und BD rechtwinklich schneiden. Setzen wir wieder die unbekannte Distanz $ov = t$, $fo = y$, $go = y'$, W. $B'DE = \psi$ und W. $D'BE = \psi'$, so ist ähnlich wie früher

$$\frac{t}{y}=\tan\psi,\ \frac{t}{y'}=\tan\psi';$$

und da $\psi'=90^0-\psi$ sein muss:

$$\frac{t}{y}=\tan\psi,\ \frac{t}{y'}=\cot\psi;$$

woraus

$$t^2=yy',\ t=\sqrt{yy'}$$

folgt. Wenn also o beliebig auf fg genommen wird, so muss die Distanz $os=ov$ die mittlere Proportionale zwischen fo und go sein. Beschreibt man also über fg als Durchmesser einen Halbkreis, so ist für jeden beliebig zwischen f und g genommenen Augenpunkt o die Ordinate os die Distanz, also v der Distanzpunkt, wenn $ov=os$ gemacht wird.

3) Soll endlich $ABCD$ ein Quadrat werden, so müssen beide bisher gefundenen Bedingungen gleichzeitig statt finden. Fällt man also von dem Durchschnitte s beider Halbkreise über pq und fg eine Senkrechte so auf den Horizont, so ist o der Augenpunkt und, wenn $ov=os$ genommen wird, v der Distanzpunkt.

Hat man in jedem Falle Augen- und Distanzpunkt bestimmt, so lassen sich nun leicht nach dem am Ende des vorigen Paragraphen gezeigten Verfahren die den gegebenen Punkten a, b, c, d entsprechenden A, B, C, D auffinden.

§. 4.

Wir wollen uns jetzt mit den perspektivischen Projektionen des Kreises beschäftigen. Zu grösserer Einfachheit setzen wir voraus, dass der Mittelpunkt des zu projizirenden Kreises in (E) auf der verlängerten Augenhöhe liege (Taf. IV. Fig 1.) und dass der Kreis die Grundlinie mn berühre. Nehmen wir, wie bisher, die Augenhöhe und deren Verlängerung zur Abscissenachse und den Durchschnitt derselben mit der Grundlinie mn zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Gleichung des gegebenen Kreises in (E)

$$Y^2=2RX-X^2, \tag{7}$$

wobei R den Halbmesser desselben bezeichnet.

Um jetzt die Gleichung der Projektion unseres Kreises zu finden, brauchen wir bloss die Gleichungen (3) und (4) in Anwendung zu bringen, durch welche statt der Coordinaten X, Y in (E) die neuen Coordinaten x, y in (e) eingeführt werden. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{uy}{t-x}\right)^2=\frac{2Rtx}{t-x}-\left(\frac{tx}{u-x}\right)^2,$$

nach einer leichten Reduction:

$$y^2=\frac{1}{u^2}[2Rutx-(2Rt+t^2)x^2],$$

XXXI.

Ueber die Dehnung und das Zerrei sen prismatischer Körper unter d Voraussetzung, dass die spannend Kraft ausserhalb der Schwerpunkt Achse des Körpers wirkt.

Von dem

Herrn Fabriken-Commissions-Rathe A. F. W. Br

zu Berlin.

Bereits im vierten Bande dieses Archivs, S. 293 u. f., h ich eine theoretische Untersuchung über die Dehnung prismatisc Stäbe mit ungleichen Querschnitten mitgetheilt, zu der ich du meine Versuche im Königlichen Gewerbe-Institut zur Ermittel der Elasticität des Schmiedeeisens veranlasst worden war. E gleiche Veranlassung hat die vorliegende Arbeit, die ich hier der Oeffentlichkeit übergebe, da die Resultate derselben für Anwendung von Wichtigkeit zu sein scheinen, obgleich sie sel vom wissenschaftlichen Standpunkte aus vielleicht nur ein gerin Interesse in Anspruch nehmen kann. Ich habe mich aber dadu nicht abhalten lassen, die mir von der Praxis gestellte Aufg ganz elementar zu behandeln, und es dürfte auch zu bezweif sein, dass die Anwendung des höhern Calcüls kürzer zum Zi geführt oder allgemeinere Resultate gegeben haben würde, wie man sie im Nachstehenden finden wird.

Es handelt sich nämlich darum, bei prismatischen Körp die nach der Richtung ihrer Länge gespannt werden, die Dehn und demnächst die absolute Festigkeit unter der Voraussetz

Wir multipliziren diese Gleichung mit dx und integriren sie zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$. Es ergiebt sich so

$$2\cos at\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx-2a\sin at\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx,$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned}&-2\cos at.\frac{du}{dt}-2a\sin at.u\\&=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Könnte man nun hier den Werth der rechten Seite für sich ausfindig machen, so wäre das Problem der Entwickelung des Werthes von u auf die Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zurückgeführt. Es hat aber nicht die mindeste Schwierigkeit, den Werth der rechten Seite von Nr. (3) zu finden. Setzt man nämlich in dem ersten dieser Integrale $x-a=y$ und im zweiten $x+a=z$, so ergiebt sich sehr leicht:

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz,$$

oder durch Zerlegung

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz;$$

und da in einem bestimmten Integrale nichts auf die Wahl des Integrationsbuchstabens ankommt:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy+2\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz.\qquad(4)$$

Man hat aber weiter

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=\int_{-a}^{0}\frac{\sin ty}{y}dy+\int_0^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy;$$

und wenn man im ersten Integrale $y=-z$, im zweiten $y=z$ setzt:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=-\int_{+a}^{0}\frac{\sin tz}{z}dz+\int_0^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz;$$

oder durch Vertauschung der Integrationsgränzen im ersten Integral, wodurch dasselbe positiv wird,

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=2\int_0^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz.$$

Um die diesen Bedingungen entsprechenden Gleichungen zu bilden, sei x der Abstand GH zwischen der Richtungslinie der Kraft P und der Schwerpunkts-Achse, y die Entfernung OG der neutralen Achse vom Schwerpunkte G des in Betracht gezogenen Querschnittes, dann ist $x+y=HO$ der Hebelarm für die Kraft P. Bezeichnet ferner σ die Spannung einer Faser von 1 Quadratzoll Querschnitt, die sich in dem Abstande $=1$ Zoll von der neutralen Achse befindet, so drückt σz die Spannung einer gleichen Faser aus, deren Abstand von der genannten Achse $=z$ ist.

In Taf. V. Fig. 2. stelle e ein beliebiges Element des Querschnittes AB vor und z sei der Abstand desselben von der neutralen Achse XY. Betrachtet man dieses Element als den Querschnitt einer Faser, so ist dem Obigen gemäss σz die Spannung dieser Faser für die Einheit des Querschnittes, und für den Querschnitt e ist also die Spannung $s=\sigma ze$. Denkt man sich auf dieselbe Weise die Spannungen aller übrigen Fasern bestimmt, wobei der Factor σ offenbar derselbe bleibt, so erhält man für die Summe aller Spannungen den Ausdruck

$$\Sigma\sigma ze=\sigma\,.\,\Sigma ez.$$

Nach bekannten Lehren der Statik ist aber $\Sigma ez=Fy$; substituirt man dies und berücksichtigt zugleich die zuerst ausgesprochene Bedingung des Gleichgewichts, so erhält man die ihr entsprechende Gleichung

$$P=\sigma\,.\,Fy. \tag{1}$$

Ferner ist das Moment der Spannung der Faser e in Bezug auf die Achse XY gleich sz, oder, wenn für s der vorige Werth gesetzt wird,

$$sz=\sigma ez^2;$$

also ist die Summe aller Spannungs-Momente

$$\Sigma sz=\sigma\,.\,\Sigma ez^2.$$

Nach Lehren der Mechanik drückt Σez^2 das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes AB in Bezug auf XY als Achse aus, und dieses Moment lässt sich bekanntlich durch die Formel $N+Fy^2$ ausdrücken, wenn N das Trägheitsmoment der in Rede befindlichen Fläche F für die durch ihren Schwerpunkt gehende Achse VW bedeutet. Ausserdem ist $P(x+y)$ das statische Moment der Kraft P in Bezug auf die neutrale Achse XY, und da zufolge der zweiten Bedingung dieses Moment der Summe aller Spannungs-Momente gleich sein muss, so hat man dem gemäss die Gleichung

$$P(x+y)=\sigma(N+Fy^2). \tag{2}$$

Setzt man darin für P den durch die Gleichung (1) gegebenen Werth, so kömmt, da σ auf beiden Seiten sich hebt,

$$Fy(x+y)=N+Fy^2,$$

und hieraus findet man leicht

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cos at - aC\sin at,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos at + aC\sin at. \qquad (7)$$

Um noch die Constante C zu bestimmen, setzen wir in (6) $t=0$, woraus sich ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a} l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \text{Const.},$$

folglich

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = 0.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichungen (6) und (7) und schreiben zugleich b für t, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx = -\frac{\pi}{2a}\sin ab, \qquad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos ab. \qquad (9)$$

Zu bemerken ist noch, dass man in der ersten Gleichung a nicht $=0$ nehmen darf, weil für diesen Fall die Bestimmung der Constante sich ändert. Es wird dann

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

und also nicht mehr $=0$. Ebenso darf man b (das frühere t) nicht negativ nehmen, weil die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tz}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

für negative t ihre Gültigkeit verliert.

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete d perspektivischen Projektion.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betra tung der perspektivischen Projektionen verschiedener Gebi gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschie ner Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen metrische Relationen. In der That ist die harmonische Prop tion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht stört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Stra büschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion m oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind a oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es ni ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elem taren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander se rechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen woll Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein liebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welch der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projekti des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, zieh wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und s zen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die La des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht st henden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coo linaten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

$PM : MN = Vv : vN$,

d. i.

$X : Y - y = t : y$,

woraus man findet

$$y = \frac{tY}{t+X}.$$

Nun ist auch

$Vv : PM = VN : PN$,

d. i.

$t : X = VN : PN$;

mithin

$$t + X : X = VN + PN : PN$$
$$= VP : PN.$$

Aus $\Delta OVP \sim \Delta pNP$ fliesst aber:

$$VP : PN = OV : pN$$
$$= u : x.$$

Substituirt man diese Proportion in die vorhergehende, so hat man:

$$t + X : X = u : x,$$

folglich

$$x = \frac{uX}{t+X}.$$

Aus den beiden gefundenen Formeln:

$$x = \frac{uX}{t+X}, \quad (1)$$

$$y = \frac{tY}{t+X} \quad (2)$$

kann man leicht auch die umgekehrten

$$X = \frac{tx}{u-x}, \quad (3)$$

$$Y = \frac{uy}{u-x} \quad (4)$$

ableiten, und zwar (3) aus (1) und dann (4) aus (2) und (3).

Mit Hülfe der Formeln (1) und (2) kommt man von den Gebilden der Ebene (E) auf die der Ebene (e) und durch die folgenden (3), (4) von diesen auf jene. Bemerkenswerth ist noch, dass in dem Ausdrucke für x die Ordinate Y nicht vorkommt. Lassen

worin s die Spannung derjenigen Faser bedeutet, deren Abstand von der Schwerpunkts-Achse gleich α ist.

Da es nun mit Rücksicht auf die vorliegende Aufgabe nur darauf ankommt, den Widerstand zu ermitteln, den der Körper durch seine Cohäsion einer Trennung seiner Theile überhaupt entgegen zu setzen vermag, so ist einleuchtend, dass hierbei nur die Spannung derjenigen Faser, welche am ersten zerreissen wird, maassgebend sein kann. Es darf also zuvörderst α nur positiv genommen werden, und ausserdem ist unter s diejenige Spannung zu verstehen, welche mit der absoluten Festigkeit jener Faser im Gleichgewichte steht. Bezeichnet man dieselbe für den Quadratzoll des Querschnittes mit K, so ist also

$$P = KF \cdot \frac{N}{N + \alpha F x} \tag{7}$$

der Ausdruck für die absolute Festigkeit des ganzen Körpers. Für $x = 0$ entsteht daraus $P = KF$, welches die bekannte Formel für die absolute Festigkeit unter der besonderen Voraussetzung ist, dass die zerreissende Kraft in der Richtung der Schwerpunkts-Achse wirkt. Fällt aber die Richtung der Kraft mit derjenigen Faser zusammen, die bei der Trennung des Körpers am ersten zerreisst, so muss $x = \alpha$ gesetzt werden, und es entsteht

$$P = KF \cdot \frac{N}{N + \alpha^2 F} \tag{8}$$

Wenden wir diese Gleichung auf die vorhin betrachteten besonderen Fälle an, so ist

1) für einen rechteckigen Querschnitt von den Abmessungen b und d: $F = bd$, $N = \frac{1}{12} bd^3$ und $\alpha = \frac{1}{2} d$; also

$$P = \tfrac{1}{4} K . bd;$$

2) für einen kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser r: $F = \pi r^2$; $N = \frac{1}{4} \pi r^4$ und $\alpha = r$; daher

$$P = \tfrac{1}{3} K . \pi r^2.$$

Der Widerstand gegen das Zerreissen beträgt also bei einem vierkantigen Stabe, wenn die zerreissende Kraft in der Mitte einer der Seitenflächen angebracht ist, nur den **vierten Theil**, bei einem runden Stabe aber, wenn jene Kraft in einer Seitenlinie seines Mantels wirkt, nur den **fünften Theil** desjenigen Widerstandes, den die genannten Körper einer Kraft entgegen zu setzen vermögen, deren Richtungslinie jedesmal mit der Schwerpunkts-Achse zusammenfällt.

In manchen Fällen der Anwendung kann aber die Richtung der Kraft auch ganz ausserhalb des Körpers zu liegen kommen, welches unter Andern bei einem offenen Haken (Taf. V. Fig. 3.) der Fall ist. Nimmt man z. B. an, derselbe sei aus einem runden Eisenstabe vom Halbmesser r gebogen und setzt demgemäss für F, N und α die vorhin angegebenen Werthe, so hat man

Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Nimmt man nämlich in den Formeln (3) und (4) $x=u$, so werden $X=Y=\infty$, so dass der Endpunkt Q der Geraden CPQ im Unendlichen liegt; zugleich ist aber auch

$$\frac{X}{Y}=\frac{tx}{uy}=\frac{tu}{uy}=\frac{t}{y}. \qquad (6)$$

Wenn also $\frac{t}{y}=\frac{Oo}{oq}=\tan Ooq=\tan\varphi$ gesetzt wird, so ist auch $\frac{X}{Y}=\tan\varphi$, mithin W. PCM = W. Oqo. Zieht man demnach beliebige Linien qC, qC', qC'', etc. und $CQ \parallel CQ' \parallel CQ''$ etc., welche die Grundlinie sämmtlich unter dem Winkel $\varphi=\text{Arctan}\frac{t}{y}$ schneiden, so kann man wieder die letzteren als Projektionen der ersteren ansehen.

Unter den Werthen, welche φ haben kann, sind besonders zwei von Wichtigkeit.

Für $\varphi=90^0$ erhält man nämlich nach (5)

$$x=u,\quad y=0.$$

Diese x und y sind die Coordinaten des Punktes o, welchen man in der Perspektive den Augenpunkt zu nennen pflegt; also: die Projektionen aller Geraden, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen, vereinigen sich im Augenpunkte.

Ferner ist für $\varphi=45^0$

$$x=u,\quad y=t.$$

Durch diese Coordinaten wird ein Punkt v bestimmt, welcher auf dem Horizonte in der Entfernung $ov=Oo=t$ liegt. Man nennt ihn den Distanzpunkt. Also: die Projektionen aller Geraden, welche die Grundlinie unter einem halben Rechten schneiden, vereinigen sich im Distanzpunkte.

Hieraus ergiebt sich das gewöhnliche, sehr bekannte Verfahren zur Aufsuchung der perspektivischen Projektion eines gegebenen Punktes. Man denke sich zunächst die Ebene (E) (Taf. III. Fig. 4.) um 90^0 nach unten zu um mn herumgedreht, so dass sie mit der Verlängerung von (e) zusammenfällt, sei ferner o der Augen-, v der Distanzpunkt und in der Ebene (E) der Punkt P gegeben, dessen Projektion p gesucht wird, so verfahre man folgendermassen.

Man fälle von P auf die Grundlinie mn die Senkrechte PM und mache $MP'=MP$. Darauf ziehe man nach dem Augenpunkte die Gerade Mo, nach dem Distanzpunkte die Gerade $P'v$, so ist der Durchschnitt p beider Geraden die gesuchte Projektion des Punktes P. Denn die Gerade Mo ist die Projektion der ins Unendliche verlängert gedachten MP, $P'v$ die der ebenfalls ins Unendliche verlängerten $P'M$; folglich der Durchschnitt von Mo und $P'v$ die Projektion des Durchschnittes von MP und $P'M$, d. h. des Punktes P.

Diese Construktion lässt sich eben so leicht umkehren, wenn man nämlich P sucht, sobald p gegeben ist. Man zieht dann die Geraden op und vp, verlängert sie, bis sie die Grundlinie mn in

(II).... $p_m - \overset{m}{F}_1 (p-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 (p-2)_{m+2} -$ etc. (usque ad primum term. evanesc.) $=$

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \dfrac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \dfrac{\sin (p+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ + 2 \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \dfrac{\overset{m}{F}_{2i-1} (p-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos (p-1+i)\frac{\pi}{3} \end{array} \right\},$$

dum vero m impar:

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \dfrac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos (p+1+i)\frac{\pi}{3} \\ - \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \dfrac{\overset{m}{F}_{2i+1} (p-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \dfrac{\sin (p+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \end{array} \right\}.$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m = 0, 1, 2, 3$, loco formularum (1) — (4), istae:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - (p-1)_1 + (p-2)_2 - (p-3)_3 + \text{etc.} = \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}, \\ p_1 - 2(p-1)_2 + 3(p-2)_3 + 4(p-3)_4 + \text{etc.} \\ \qquad = -\tfrac{2}{3} \cdot \left(p_1 \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - \dfrac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right), \\ p_2 - 3(p-1)_3 + 6(p-2)_4 - 10(p-3)_5 + \text{etc.} \\ \qquad = -\tfrac{1}{3} \cdot \left(p_2 \cdot \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} + 2(p-1)_1 \cos \frac{p\pi}{3} + 2 \cdot \dfrac{\sin (p+2)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right), \\ p_3 - 4(p-1)_4 + 10(p-2)_5 - 20(p-3)_6 + \text{etc.} \\ \qquad = \tfrac{2}{9} \cdot \left(p_3 \cdot \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - 2(p-1)_2 \dfrac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right. \\ \qquad \left. + \tfrac{10}{2} (p-2)_1 \cos (p+2)\frac{\pi}{3} - \tfrac{10}{2} \cdot \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right). \end{array} \right.$$

3. Ex hac tandem formulâ (II) habentur, posito $p=m$, notandae hae numerorum figuratorum relationes:

1°) dum m num. est integer par:

$$1=(-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}}\frac{{}^{m}F_{2i}}{3^i}\cdot\frac{\sin(m+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\\ \displaystyle+2\sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}}\frac{{}^{m}F_{2i-1}}{3^i}\cos(m-1+i)\frac{\pi}{3}\end{array}\right\},$$

(III)

2°) dum m impar est:

$$1=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\displaystyle 2\sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}}\frac{{}^{m}F_{2i}}{3^i}\cos(m+1+i)\frac{\pi}{3}\\ \displaystyle-\sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}}\frac{{}^{m}F_{2i+1}}{3^i}\cdot\frac{\sin(m+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\end{array}\right\}.$$

Nota.

Meminisse juvabit, numeros m^i ordinis figuratos (m num. int. aut 0)

$$m_0,\ (m+1)_1,\ (m+2)_2,\ \text{etc.}$$

coëfficientes esse potentiarum ipsius x in evoluta functione

$$(1-x)^{-(m+1)};$$

coëfficientem vero ipsius x^n in evoluta functione

$$[1-x(1-x)]^{-(m+1)}$$

ipsum conficere membrum prius aequationis nostrae (I).

zweites, drittes u. s. w. $n$tes Element, d. h. in n verschiedenen Stellen, angefügt werden. Es ist also die Zahl, welche angibt, wie oft ein Element in der $n$ten Klasse aus m Elementen enthalten ist, $n$mal so gross als die Anzahl der Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus $(m-1)$ Elementen. Diess in Zeichen ausgedrückt heisst.

$$\text{I.} \quad \binom{n}{A}_m = n\binom{n-1}{C}_{m-1};$$

da nun, zufolge *B*), allgemein $\binom{n}{C}_m = \frac{m}{n}\binom{n}{A}_m$, so ist hier:

$$\text{II.} \quad \binom{n}{C}_m = m\binom{n-1}{C}_{m-1} = m(m-1)\binom{n-2}{C}_{m-2} = m(m-1)(m-2)\binom{n-3}{C}_{m-3}$$

$$= m(m-1)(m-2)\ldots(m-(p-1))\binom{n-p}{C}_{m-p},$$

wo nothwendig einmal $\binom{n-p}{C}_{m-p} = \binom{1}{C}_{m-(n-1)}$ werden muss, nemlich wenn $p = n-1$ wird.

Es ist aber dann $\binom{1}{C}_{m-(n-1)} = m-(n-1)$, weil $m-(n-1)$ Elemente $m-(n-1)$ Unionen geben. Auch ist dann $m-(p-1) = m-(n-2)$, also

$$\text{III.} \quad \binom{n}{C}_m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-2))(m-(n-1))$$

= der Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen zur $n$ten Klasse für m Elemente;

hieraus ergibt sich

$$\binom{n}{A}_m = n\binom{n-1}{C}_{m-1} = n.[(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-(n-1))].$$

γ) *Variationen mit unbeschränkten Wiederholungen.* Bildung der $n$ten Klasse.

9. Wenn man eines der m Elemente allen Complexionen der $(n-1)$ten Classe für m Elemente zur Linken anfügt, so erhält man alle jene Complexionen der $n$ten Klasse, in welchen das fragliche Element in der ersten Stelle jeder Complexion sich befindet. Dasselbe gilt von jedem andern Element in Beziehung auf die betreffende andere Ordnung *) der $n$ten Klasse.

Jedes Element ist also in der $n$ten Klasse sovielmal als erstes Element vorhanden, als die $(n-1)$te Klasse Complexionen zählt.

*) Alle jene Complexionen einer Klasse, die einerlei Anfangselement haben, zu einerlei Ordnung gerechnet.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cos at - aC\sin at,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos at + aC\sin at. \qquad (7)$$

Um noch die Constante C zu bestimmen, setzen wir in (6) $t=0$, woraus sich ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a} l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \text{Const.},$$

folglich

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = 0.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichungen (6) und (7) und schreiben zugleich b für t, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx = -\frac{\pi}{2a}\sin ab, \qquad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos ab. \qquad (9)$$

Zu bemerken ist noch, dass man in der ersten Gleichung a nicht $=0$ nehmen darf, weil für diesen Fall die Bestimmung der Constante sich ändert. Es wird dann

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

und also nicht mehr $=0$. Ebenso darf man b (das frühere t) nicht negativ nehmen, weil die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tz}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

für negative t ihre Gültigkeit verliert.

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete d perspektivischen Projektion.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betra tung der perspektivischen Projektionen verschiedener Gebi gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschie ner Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen metrische Relationen. In der That ist die harmonische Prop tion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht stört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Stra büschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion m oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind a oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es ni ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elem taren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander se rechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen woll Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein l liebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welch der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projekti des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, zieh wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und s zen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die La des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht st henden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coo dinaten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

$$PM : MN = Vv : vN,$$

d. i.

$$X : Y - y = t : y,$$

woraus man findet

$$y = \frac{tY}{t+X}.$$

Nun ist auch

$$Vv : PM = VN : PN,$$

d. i.

$$t : X = VN : PN;$$

mithin

$$t + X : X = VN + PN : PN$$
$$= VP : PN.$$

Aus $\Delta OVP \backsim \Delta pNP$ fliesst aber:

$$VP : PN = OV : pN$$
$$= u : x.$$

Substituirt man diese Proportion in die vorhergehende, so hat man:

$$t + X : X = u : x,$$

folglich

$$x = \frac{uX}{t+X}.$$

Aus den beiden gefundenen Formeln:

$$x = \frac{uX}{t+X}, \tag{1}$$

$$y = \frac{tY}{t+X} \tag{2}$$

kann man leicht auch die umgekehrten

$$X = \frac{tx}{u-x}, \tag{3}$$

$$Y = \frac{uy}{u-x} \tag{4}$$

ableiten, und zwar (3) aus (1) und dann (4) aus (2) und (3).

Mit Hülfe der Formeln (1) und (2) kommt man von den Gebilden der Ebene (B) auf die der Ebene (e) und durch die folgenden (4) von diesen auf jene. Bemerkenswerth ist noch, dass in den Ausdrucke für x die Ordinate Y nicht vorkommt. Lassen

Da nun allgemein gemäss *B*) und *A*):

$$\binom{n}{m}=\frac{m}{n}\binom{n}{m} \text{ oder } \binom{n}{m}=\frac{n}{m}\binom{n}{m},$$

so muss auch

$$\binom{n-1}{m}=\frac{n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m},$$

mithin

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\frac{n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m}=\left(1+\frac{n-1}{m}\right)\binom{n-1}{m}=\frac{m+n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m}$$

sein; also gemäss *B*):

$$\binom{n}{m}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m+n-1}{m}\binom{n-1}{m}\right),$$

folglich

$$\text{II.}\quad \binom{n}{m}=\frac{m+n-1}{n}\cdot\binom{n-1}{m}.$$

Es ist also

$$\binom{n}{m}=\frac{m+n-1}{n}\cdot\frac{m+n-2}{n-1}\cdot\binom{n-2}{m}=\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{n\,.\,(n-1)}\cdot\frac{m+n-3}{n-2}\binom{n-3}{m}$$

$$=\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots.(m+n-p)}{n\,.\,(n-1)\ldots.(n-(p-1))}\cdot\binom{n-p}{m},$$

wo, wenn $\binom{n-p}{m}=\binom{1}{m}=m$ wird, auch $n-p=1$, also $p=n-1$, mithin auch $m+n-p=m+1$ und $n-(p-1)=2$ werden muss, so dass

$$\text{III.}\quad \binom{n}{m}=\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots.(m+1)\,.\,m}{n\,.\,(n-1)\ldots.2\,.\,1}$$

ist, welcher Formel man auch folgende beide Gestalten geben kann:

$$\odot)\ \binom{n}{m}=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots.(m+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.n}$$

und

$$)(\ \binom{n}{m}=\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots.(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.(m-1)}$$

$$\Bigg\}=\begin{array}{l}\text{Anzahl der Complexionen der } n\text{ten}\\ \text{Klasse aus } m \text{ Elementen beim Combiniren}\\ \text{mit unbeschränkten}\\ \text{Wiederholungen,}\end{array}$$

wo wieder $\odot$) bequemer ist als $)($), wenn $n<(m-1)$ und umgekehrt.

Da nun nach *A*)

$$\binom{n}{m}=\frac{n}{m}\binom{n}{m},$$

Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Nimmt man nämlich in den Formeln (3) und (4) $x=u$, so werden $X=Y=\infty$, so dass der Endpunkt Q der Geraden CPQ im Unendlichen liegt; zugleich ist aber auch

$$\frac{X}{Y}=\frac{tx}{uy}=\frac{tu}{uy}=\frac{t}{y}. \qquad (6)$$

Wenn also $\frac{t}{y}=\frac{Oo}{oq}=\tan Ooq=\tan\varphi$ gesetzt wird, so ist auch $\frac{X}{Y}=\tan\varphi$, mithin W. PCM = W. Oqo. Zieht man demnach beliebige Linien qC, qC', qC'', etc. und $CQ \parallel CQ' \parallel CQ''$ etc., welche die Grundlinie sämmtlich unter dem Winkel $\varphi=\text{Arctan}\frac{t}{y}$ schneiden, so kann man wieder die letzteren als Projektionen der ersteren ansehen.

Unter den Werthen, welche φ haben kann, sind besonders zwei von Wichtigkeit.

Für $\varphi=90^0$ erhält man nämlich nach (5)

$$x=u,\quad y=0.$$

Diese x und y sind die Coordinaten des Punktes o, welchen man in der Perspektive den Augenpunkt zu nennen pflegt; also: die Projektionen aller Geraden, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen, vereinigen sich im Augenpunkte.

Ferner ist für $\varphi=45^0$

$$x=u,\quad y=t.$$

Durch diese Coordinaten wird ein Punkt v bestimmt, welcher auf dem Horizonte in der Entfernung $ov=Oo=t$ liegt. Man nennt ihn den Distanzpunkt. Also: die Projektionen aller Geraden, welche die Grundlinie unter einem halben Rechten schneiden, vereinigen sich im Distanzpunkte.

Hieraus ergiebt sich das gewöhnliche, sehr bekannte Verfahren zur Aufsuchung der perspektivischen Projektion eines gegebenen Punktes. Man denke sich zunächst die Ebene (E) (Taf. III. Fig. 4.) um 90^0 nach unten zu um mn herumgedreht, so dass sie mit der Verlängerung von (e) zusammenfällt, sei ferner o der Augen-, v der Distanzpunkt und in der Ebene (E) der Punkt P gegeben, dessen Projektion p gesucht wird, so verfahre man folgendermassen.

Man fälle von P auf die Grundlinie mn die Senkrechte PM und mache $MP'=MP$. Darauf ziehe man nach dem Augenpunkte die Gerade Mo, nach dem Distanzpunkte die Gerade $P'v$, so ist der Durchschnitt p beider Geraden die gesuchte Projektion des Punktes P. Denn die Gerade Mo ist die Projektion der ins Unendliche verlängert gedachten MP, $P'v$ die der ebenfalls ins Unendliche verlängerten PM; folglich der Durchschnitt von Mo und $P'v$ die Projektion des Durchschnittes von MP und PM, d. h. des Punktes P.

Diese Construktion lässt sich eben so leicht umkehren, wenn man nämlich P sucht, sobald p gegeben ist. Man zieht dann die Geraden op und vp, verlängert sie, bis sie die Grundlinie mn in

Die Reihe δ) ist die gemeinschaftliche allgemeine Form f
folgende bekanntlich höchst wichtige Reihen:

	1stes	2tes	3tes	4tes	ntes Glied	Summe der Reihe.
$m=1$	1	1	1	1	1	$\frac{n}{1}$
$m=2$	1	2	3	4	$\frac{n}{1}$	$\frac{n(n+1)}{1.2}$
$m=3$	1	3	6	10	$\frac{n(n+1)}{1.2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
$m=4$	1	4	10	20	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
$m=5$	1	5	15	35	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
$m=m$	1	$\frac{m}{1}$	$\frac{m(m+1)}{1.2}$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$	$\frac{m(m+1)....(m+n-2)}{1.2...(m-1)}$ oder $\frac{m(n+1)....(n+m-2)}{1.2....(n-1)}$	$\frac{m(m+1)(m+2)...(m+n-1)}{1.2.3...(n-1)}$ oder $\frac{n(n+1)(n+2)....(n+m-1)}{1.2.3....(m-1)}$

XXXIII.

Ueber die Auflösung der Gleichung $ax+by+cz=0$, wo a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, in ganzen Zahlen.

Aus einer Abhandlung von Cauchy (Exercices de Mathématiques. 9me Livraison) ausgezogen

von

dem Herausgeber.

Wenn man in den Formeln

$$1)\quad \begin{cases} x=bw-cv, \\ y=cu-aw, \\ z=av-bu \end{cases}$$

für u, v, w beliebige ganze Zahlen setzt, so erhält man, wovon man sich durch ganz leichte Rechnung auf der Stelle überzeugt, allemal eine Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen. Vorzüglich kommt es nun aber hierbei darauf an, dass man zeigt, dass die Gleichungen 1) auch alle Auflösungen der vorhergehenden Gleichung in ganzen Zahlen liefern, welche es geben kann, was bei dieser Untersuchung bei Weitem die Hauptsache ist.

Um diesen Beweis zu führen, wollen wir, was offenbar jederzeit verstattet ist, annehmen, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c die Einheit sei, oder dass diese Grössen relative Primzahlen seien. Sind nun, dies vorausgesetzt, X, Y, Z drei ganze Zahlen, durch welche die Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

aufgelöst wird, so ist

$$2)\ aX+bY+cZ=0;$$

und wenn wir den grössten gemeinschaftlichen Theiler von a und b durch d bezeichnen, so muss d in

$$cZ=-aX-bY$$

aufgehen. Da aber c und d nothwendig relative Primzahlen sein müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, offenbar a, b, c nicht relative Primzahlen sein würden, wie doch vorausgesetzt wurde, so muss nach einem allgemein bekannten Satze d in Z aufgehen, und daher $\frac{Z}{d}$ eine ganze Zahl sein. Weil d der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b ist, so sind $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ relative Primzahlen, und die Gleichung des ersten Grades

$$\frac{a}{d}V-\frac{b}{d}U=\frac{Z}{d}$$

zwischen den beiden unbekannten Grössen U und V, oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$3)\ Z=aV-bU,$$

ist also bekanntlich immer in ganzen Zahlen auflösbar, d. h. es lassen sich für U und V immer ganze Zahlen finden, welche dieser Gleichung genügen. Eliminirt man nun Z aus den beiden Gleichungen 2) und 3), so erhält man die Gleichung

$$a(X+cV)=b(cU-Y)$$

oder

$$4)\ \frac{a}{d}(X+cV)=\frac{b}{d}(cU-Y),$$

wo $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ relative Primzahlen sind. Daher muss nach dem schon oben angewandten Satze $\frac{b}{d}$, welches in dem Producte $\frac{a}{d}(X+cV)$ aufgeht, in $X+cV$ aufgehen, und man kann folglich, wenn G eine ganze Zahl bezeichnet,

$$5)\ X+cV=\frac{b}{d}G$$

setzen. Führt man aber diesen Werth von $X+cV$ in die Gleichung 4) ein, so erhält man auf der Stelle ferner

$$6)\ cU-Y=\frac{a}{d}G.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) ergiebt sich

$$7)\quad X=\frac{b}{d}G-cV,\ Y=cU-\frac{a}{d}G.$$

Da nach dem Obigen c und d relative Primzahlen sind, so ist die Gleichung des ersten Grades

$$8)\quad dU'-cV'=G$$

zwischen den beiden unbekannten Grössen U' und V' bekanntlich in ganzen Zahlen auflösbar, d. h. es lassen sich für U' und V' immer ganze Zahlen finden, welche dieser Gleichung genügen; und führt man nun den Werth von G aus 8) in die Gleichungen 7) ein, so erhält man:

$$9)\quad \begin{cases} X=bU'-c(V+\frac{b}{d}V'), \\ Y=c(U+\frac{a}{d}V')-aU'. \end{cases}$$

Ueberlegt man jetzt noch, dass sich die Gleichung 3) offenbar auch auf den folgenden Ausdruck bringen lässt:

$$Z=a(V+\frac{b}{d}V')-b(U+\frac{a}{d}V'),$$

so hat man für die Grössen X, Y, Z die folgenden Ausdrücke:

$$10)\quad \begin{cases} X=bU'-c(V+\frac{b}{d}V'), \\ Y=c(U+\frac{a}{d}V')-aU', \\ Z=a(V+\frac{b}{d}V')-b(U+\frac{a}{d}V'). \end{cases}$$

Vergleicht man aber diese Formeln mit den Formeln 1), so ergiebt sich, dass die letzteren aus den ersteren hervorgehen, wenn man

$$u=U+\frac{a}{d}V',\ v=V+\frac{b}{d}V',\ w=U'$$

setzt, und dass jede beliebige durch das System X, Y, Z dargestellte Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen aus den allgemeinen Formeln 1) erhalten wird, wenn man nur für u, v, w in diesen Formeln gewisse ganze Zahlen setzt, wie behauptet wurde.

Noch wollen wir bemerken, dass, wenn das System x_0, y_0, z_0 irgend eine bestimmte Auflösung der Gleichung

$$a=\frac{Ru}{2R+t},\quad b^2=\frac{R^2t}{2R+t},$$

und hier liegt die grosse Achse in der Augenhöhe, folglich kleine der Grundlinie parallel. Dieser Fall ist reich an sch analytischen Beziehungen. So erhält man z. B. aus dem Obi

$$\frac{b^2}{a}=\frac{Rt}{u};$$

aber $\frac{b^2}{a}$ ist der halbe Parameter der Ellipse; nehmen wir $=\frac{1}{2}p$, so folgt jetzt die interessante Proportion:

$$u:t=R:\tfrac{1}{2}p,$$

aus welcher man leicht eine Construktion der in (*e*) zu zeich den Ellipse ableiten kann.

Nennt man *c* die lineare Excentricität der Ellipse $c=\sqrt{a^2}$ so findet man aus (15)

$$c=\frac{R\sqrt{u^2+2Rt+t^2}}{2R+t},$$

$$u+a=\frac{Ru+R\sqrt{u^2+2Rt+t^2}}{2R+t}.$$

An diese Formeln wollen wir noch folgende Betrachtung anschlie

Nimmt man in Bezug auf unsere Ellipse in (*e*) die durch Augenpunkt gelegte Horizontale als Polare an, so ist der zug rige Pol nichts Anderes, als die Projektion des in (*E*) gegeb Kreismittelpunktes. Alle durch diesen gehenden Linien, we nämlich von demselben und dem Kreise in drei Punkten gese ten, welche mit dem unendlich entfernten Punkte der Geraden System harmonisch liegender Punkte ausmachen. Die Projek einer harmonischen Geraden ist aber wieder harmonisch get In (*e*) aber entsprechen der von dem Kreise in (*E*) durchschn nen Geraden eine von der Ellipse geschnittene Gerade, dem u lich entfernten Punkte ein Punkt auf der Horizontalen, wel mit jenen zwei Punkten der Ellipse in einer Geraden liegt, fol muss auch dem letzten der harmonischen Punkte, d. h. dem K mittelpunkte, derjenige Punkt in (*e*) entsprechen, welcher der v harmonische zu den drei schon gefundenen ist, d. h. der ha nische Pol, mithin ist dieser die Projektion des Kreismittelp tes in (*E*).

Man könnte nun die Frage aufstellen, ob es nicht möglich das Projektionscentrum so zu legen, dass der Pol mit einem Brennpunkte zusammen fällt. Hierauf ist die Antwort folgende

Nennen wir x die Entfernung des harmonischen Poles von Grundlinie *mn*, so lässt sich dieselbe mit Hülfe der Gleichung finden, wenn man bemerkt, dass für den harmonischen Pol x ist. Wir haben also:

$$x=\frac{Ru}{R+t}.$$

Soll nun der harmonische Pol mit dem Brennpunkte (es kann hier nur der obere sein) zusammenfallen, so muss $x=a+c$ werden, woraus durch Substitution der Werthe von x und $a+c$ aus (17) folgt:

$$\frac{Ru}{R+t}=\frac{Ru+R\sqrt{u^2-2Rt+t^2}}{2R+t}$$

oder

$$\frac{2R+t}{R+t}u-u=\sqrt{u^2-2Rt+t^2}$$

d. h. weil die linke Seite $=\left(\frac{2R+t}{R+t}-1\right)u=\frac{Ru}{R+t}$ ist:

$$\frac{R^2u^2}{(R+t)^2}=u^2-2Rt-t^2,$$

oder durch Transposition

$$2Rt+t^2=\left(1-\frac{R^2}{R^2+2Rt+t^2}\right)u^2=\frac{(2Rt+t^2)u^2}{(R+t)^2},$$

woraus folgt

$$\frac{u^2}{(R+t)^2}=1,$$

und mithin

$$u=R+t,\quad t=u-R. \tag{18}$$

gewiss ein überraschend einfaches Resultat!

Will man also einen gegebenen Kreis so projiziren, dass in der entstehenden Ellipse ein Brennpunkt mit dem harmonischen Pol in Bezug auf eine noch zu bestimmende Gerade zusammenfalle, so hat man folgendes Verfahren zu beobachten (Taf. IV. Fig. 1.):

Durch einen beliebigen Punkt A des gegebenen Kreises lege man eine Tangente und ziehe von dem Mittelpunkte C die Senkrechte CA. Auf ihrer Verlängerung über A hinaus nehme man eine Strecke $Ao>AC$ beliebig und o als Augenpunkt. Hierauf mache man $Ac=AC$, ziehe durch o eine Senkrechte auf Ao und nehme auf ihr $ov=oc$, so ist v der zugehörige Distanzpunkt. Projizirt man mit Hülfe beider Punkte den Kreis in (E) auf (e), so erhält man eine Ellipse, deren Brennpunkt c zugleich der Pol in Bezug auf ov als Polare ist.

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete der perspektivischen Projektion.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betrachtung der perspektivischen Projektionen verschiedener Gebilde gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschiedener Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen auf metrische Relationen. In der That ist die harmonische Proportion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht gestört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden ist wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Strahlbüschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion mehr oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind aber oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es nicht ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elementaren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander senkrechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen wollen. Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein beliebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welchem der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projektion des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, ziehen wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und setzen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die Lage des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=X$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, P eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht stehenden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coordinaten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

$$x=\frac{Ru}{R+t}.$$

Soll nun der harmonische Pol mit dem Brennpunkte (es kann hier nur der obere sein) zusammenfallen, so muss $x=a+c$ werden, woraus durch Substitution der Werthe von x und $a+c$ aus (17) folgt:

$$\frac{Ru}{R+t}=\frac{Ru+R\sqrt{u^2-2Rt+t^2}}{2R+t}$$

oder

$$\frac{2R+t}{R+t}u-u=\sqrt{u^2-2Rt+t^2},$$

d. h. weil die linke Seite $=\left(\frac{2R+t}{R+t}-1\right)u=\frac{Ru}{R+t}$ ist:

$$\frac{R^2u^2}{(R+t)^2}=u^2-2Rt-t^2,$$

oder durch Transposition

$$2Rt+t^2=\left(1-\frac{R^2}{R^2+2Rt+t^2}\right)u^2=\frac{(2Rt+t^2)u^2}{(R+t)^2},$$

woraus folgt

$$\frac{u^2}{(R+t)^2}=1,$$

und mithin

$$u=R+t,\quad t=u-R. \tag{18}$$

gewiss ein überraschend einfaches Resultat!

Will man also einen gegebenen Kreis so projiziren, dass in der entstehenden Ellipse ein Brennpunkt mit dem harmonischen Pol in Bezug auf eine noch zu bestimmende Gerade zusammenfalle, so hat man folgendes Verfahren zu beobachten (Taf. IV Fig. 1.):

Durch einen beliebigen Punkt A des gegebenen Kreises lege man eine Tangente und ziehe von dem Mittelpunkte C die Senkrechte CA. Auf ihrer Verlängerung über A hinaus nehme man eine Strecke $Ao>AC$ beliebig und o als Augenpunkt. Hierauf mache man $Ac=AC$, ziehe durch c eine Senkrechte auf Ao und nehme auf ihr $ov=oc$, so ist v der zugehörige Distanzpunkt. Projizirt man mit Hülfe beider Punkte den Kreis in (E) auf (e), so erhält man eine Ellipse, deren Brennpunkt c zugleich der Pol in Bezug auf ov als Polare ist.

Denken wir uns dann ferner durch alle Theilpunkte die vertikalen Linien

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4,\ a_5b_5,\ \ldots.$$

gezogen, so sind nach bekannten Sätzen die durch den Fall auf AB in

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ \ldots.$$

erlangten Geschwindigkeiten respective:

$$2\sqrt{g.a_1b_1},\ 2\sqrt{g.a_2b_2},\ 2\sqrt{g.a_3b_3},\ 2\sqrt{g.a_4b_4},\ \ldots.;$$

wo g seine bekannte Bedeutung hat.

Nach dem oben zuerst ausgesprochenen Princip gelangt der schwere Punkt auf der Curve AB mit der in dem $n$ten und $(n+1)$sten Theilpunkte erlangten Geschwindigkeit in der kürzesten Zeit von dem $n$ten bis zum $(n+2)$ten Theilpunkte, und wir haben daher nach dem oben bewiesenen Satze in den vorher eingeführten Bezeichnungen offenbar die folgenden Proportionen:

$$\cos\alpha : \cos\alpha_1 = 0 : 2\sqrt{g.a_1b_1} = 0 : \sqrt{a_1b_1},$$

$$\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 = 2\sqrt{g.a_1b_1} : 2\sqrt{g.a_2b_2} = \sqrt{a_1b_1} : \sqrt{a_2b_2},$$

$$\cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 = 2\sqrt{g.a_2b_2} : 2\sqrt{g.a_3b_3} = \sqrt{a_2b_2} : \sqrt{a_3b_3},$$

$$\cos\alpha_3 : \cos\alpha_4 = 2\sqrt{g.a_3b_3} : 2\sqrt{g.a_4b_4} = \sqrt{a_3b_3} : \sqrt{a_4b_4},$$

u. s. w.

Da nun die einzelnen Elemente der Curve mit den entsprechenden Berührenden derselben als zusammenfallend betrachtet werden können, so sind offenbar

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

die von den Berührenden der Curve in den Punkten

$$A,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots.$$

mit der durch A gezogenen horizontalen Linie AC, welche wir als den positiven Theil der Abscissenaxe und A also als den Anfang der Abscissen annehmen wollen, eingeschlossenen Winkel; und wenn wir nun überhaupt zwei dieser Winkel durch Θ, Θ' und die Ordinaten der entsprechenden Punkte der Curve durch y, y' bezeichnen, so erhellet aus dem Obigen unmittelbar die Richtigkeit der Proportion

$$\cos\Theta : \cos\Theta' = \sqrt{y} : \sqrt{y'}$$

oder die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}} = \frac{\cos\Theta'}{\sqrt{y'}},$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cos at - aC\sin at,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos at + aC\sin at. \tag{7}$$

Um noch die Constante C zu bestimmen, setzen wir in (6) $t=0$, woraus sich ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a} l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \text{Const.},$$

folglich

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = 0.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichungen (6) und (7) und schreiben zugleich b für t, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx = -\frac{\pi}{2a}\sin ab, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos ab. \tag{9}$$

Zu bemerken ist noch, dass man in der ersten Gleichung a nicht $=0$ nehmen darf, weil für diesen Fall die Bestimmung der Constante sich ändert. Es wird dann

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

und also nicht mehr $=0$. Ebenso darf man b (das frühere t) nicht negativ nehmen, weil die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tz}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

für negative t ihre Gültigkeit verliert.

und folglich

$$x = \frac{2}{a}\int \sin\omega^2\, d\omega + \text{Const.}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int \sin\omega^2\, d\omega &= \sin\omega \int \sin\omega\, d\omega - \int d\sin\omega \int \sin\omega\, d\omega \\ &= \sin\omega \int \sin\omega\, d\omega - \int \cos\omega\, d\omega \int \sin\omega\, d\omega \\ &= -\sin\omega\cos\omega + \int \cos\omega^2\, d\omega \\ &= -\sin\omega\cos\omega + \int (1-\sin\omega^2)\, d\omega \\ &= \omega - \sin\omega\cos\omega - \int \sin\omega^2\, d\omega,\end{aligned}$$

also

$$\int \sin\omega^2\, d\omega = \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\sin\omega\cos\omega,$$

und folglich

$$x = \frac{1}{a}(\omega - \sin\omega\cos\omega) + \text{Const.}$$

Also ist

$$\begin{aligned}ax &= \omega - \sin\omega\cos\omega + \text{Const.}, \\ ay &= \sin\omega^2;\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}2ax &= 2\omega - 2\sin\omega\cos\omega + \text{Const.}, \\ 2ay &= 2\sin\omega^2;\end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned}2ax &= 2\omega - \sin 2\omega + \text{Const.}, \\ 2ay &= 1 - \cos 2\omega.\end{aligned}$$

Für $y = 0$ ist nach dem Obigen offenbar auch $x = 0$. Für $y = 0$ ist aber

$$1 - \cos 2\omega = 0 \text{ oder } \cos 2\omega = 1,$$

und folglich, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $2\omega = 2k\pi$. Also ist nach dem Obigen

$$0 = 2k\pi - \sin 2k\pi + \text{Const.} = 2k\pi + \text{Const.},$$

d. i. $\text{Const.} = -2k\pi$, und folglich

$$\begin{aligned}2ax &= 2\omega - 2k\pi - \sin 2\omega, \\ 2ay &= 1 - \cos 2\omega.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\sin(2\omega - 2k\pi) = \sin 2\omega, \quad \cos(2\omega - 2k\pi) = \cos 2\omega.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$2ax = 2\omega - 2k\pi - \sin(2\omega - 2k\pi),$$
$$2ay = 1 - \cos(2\omega - 2k\pi);$$

und folglich, wenn man überhaupt

$$\varphi = 2\omega - 2k\pi$$

setzt:

$$2ax = \varphi - \sin\varphi, \quad 2ay = 1 - \cos\varphi;$$

oder für $\frac{1}{2a} = r$:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Im Anfange der Bewegung müssen x und y beide zugleich verschwinden, welches offenbar nur für $\varphi = 0$ möglich ist, da nur für diesen Werth von φ die Differenz $\varphi - \sin\varphi = 0$, d. i. $\sin\varphi = \varphi$ sein kann. Also hat man für den Anfang der Bewegung $\varphi = 0$ zu setzen. Wollte man φ negativ nehmen, so würde, weil der absolute Werth von φ immer grösser als der absolute Werth von $\sin\varphi$ ist, x negativ, da doch im Obigen x als positiv angenommen worden ist. Folglich muss man φ von 0 an zunehmen, nicht von 0 an abnehmen lassen, woraus sich wegen der Gleichungen

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi)$$

nun unmittelbar auf ganz unzweideutige Weise ergiebt, dass die gesuchte Curve eine gemeine Cycloide ist, deren erzeugender Kreis den Halbmesser $r = \frac{1}{2a}$ hat.

Wegen der aus dem Obigen sich ganz von selbst ergebenden wichtigen und merkwürdigen mechanischen Eigenschaft der gemeinen Cycloide nennt man dieselbe bekanntlich die Brachystochrone im luftleeren Raume.

XXXV.

Sur les fractions partielles.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

I.

Dans beaucoup de recherches analytiques il importe de décomposer une fonction rationelle et fractionnaire en fractions partielles, et, réciproquement, de réduire une somme de fractions partielles à une fonction fractionnaire. — Pour rèsoudre ce double problème dans toute sa généralité, nous désignons par F_x une fonction entière de x du degré n. Soient $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x. Alors, en supposant que cette équation contienne n_1 racines égales r_1, n_2 racines égales r_2, etc., on aura

$$F_x = A(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

ou, en prenant le coefficient constant A égal à l'unité,

$$F_x = (x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m}. \tag{1}$$

Soient encore f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ des fonctions de x, liées entre elles et à la fonction F_x par l'équation

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}. \tag{2}$$

Cela fait, on pourra toujours satisfaire à l'équation (2), en supposant les fonctions f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ entières par rapport à

x, et, respectivement, d'un degré inférieur à n, n_1, n_2, ... n_m. En effet, si l'on pose

$$(3) \qquad F_x = (x - r_k)^{n_k} Q_{x,k},$$

k étant un des nombres entiers 1, 2, ... m, la fonction $Q_{x,k}$ sera entière par rapport à x du degré $n - n_k$, et le facteur $x - r_k$ n'y entrera pas. D'ailleurs on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}},$$

d'ou l'on déduit

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k} \frac{F_x}{(x-r_k)^{n_k}},$$

et, en vertu de l'équation (3),

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k}\ Q_{x,k},$$

ou

$$(4) \qquad f_x = P_{x,1}\, Q_{x,1} + P_{x,2}\, Q_{x,2} + \ldots + P_{x,m}\, Q_{x,m}.$$

Or, $Q_{x,k}$ étant du degré $n - n_k$, il suit que $P_{x,k}\ Q_{x,k}$ sera d'un degré inférieur à n, lorsqu'on suppose la fonction $P_{x,k}$ entière par rapport à x d'un degré inférieur à n_k. On voit donc que l'équation (4), ou l'équation (2), d'où elle est déduite, admet la supposition que les fonctions f_x et $P_{x,k}$ soient entières par rapport à x d'un degré inférieur à n et n_k, ensorte que l'on pourra faire

$$(5) \qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$(6) \qquad f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

$$(7) \qquad P_{x,k} = c_{0,k} + c_{1,k}(x - r_k) + c_{2,k}(x - r_k)^2 + \ldots + c_{n_k-1,k}(x - r_k)^{n_k-1}.$$

Il résulte de ce qui précède que, pour le problème de la composition, il s'agit de trouver les coefficients a_0, a_1, ... a_n et b_0, b_1, ... b_{n-1}, lorsque les quantités r_1, r_2, ... r_m et les fonctions $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, ... $P_{x,m}$ sont données; et, pour la décomposition, de trouver les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, ... $c_{n_k-1,k}$, lorsque les fonctions f_x et F_x sont données. — Commençons par la décomposition.

II.

En posant pour une fonction quelconque φ_x

$$\frac{d^n \varphi_x}{dx^n} = \partial_x^n\, \varphi_x,$$

M und P' schneiden, errichtet dann in M eine Senkrechte auf mn, und nimmt $MP = MP'$, so ist der Punkt P gefunden, dessen Projektion p sein soll. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun verschiedene metrische Relationen untersuchen, welche zwischen den Gebilden der beiden Ebenen (E) und (e) statt finden.

§. 3.

Es sei in der Ebene (e) ein Viereck $abcd$ (Taf. III. Fig. 5.) gegeben, dessen Gegenseitendurchschnitte p und q heissen mögen. Nehmen wir die Linie pq als Horizont und ziehen beliebig die Grundlinie $mn \| pq$, so müssen, wo man auch den Augenpunkt o in pq annehmen möge, die Linien ab und cd die Projektionen solcher Geraden sein, welche in (E) einander parallel laufen, weil sich der Durchschnitt p von ab und cd auf dem Horizonte befindet. Das Nämliche wird auch von den Linien ad und bc gelten, so dass also die Figur $ABCD$ in (E), als deren Projektion man sich $abcd$ denken kann, durch parallele Gegenseiten begränzt wird, d. h. ein Parallelogramm ist. Diess gilt für jede Distanz ov; legt man aber dem in (E) befindlichen Parallelogramme besondere Bedingungen auf, so bleibt auch die Distanz nicht mehr willkührlich, wie man sogleich sehen wird.

1) Man verlangt, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck werde.

Es sei der Augenpunkt o willkührlich zwischen p und q genommen, $op = y$, $oq = y'$, die erst noch zu bestimmende Distanz $ov = t$, W. $CA'D = \varphi$ und W. $A'CD = \varphi'$, so ist nach Formel (6) und dem Folgenden

$$\frac{t}{y} = \tan\varphi, \quad \frac{t}{y'} = \tan\varphi'.$$

Da aber $ABCD$ ein Rechteck sein soll, so muss $\varphi' = 90° - \varphi$ sein, mithin:

$$\frac{t}{y} = \tan\varphi, \quad \frac{t}{y'} = \cot\varphi;$$

woraus man durch Multiplikation erhält:

$$t^2 = yy', \quad t = \sqrt{yy'}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass zwar o beliebig genommen werden darf, dass aber dann die Distanz ov die mittlere Proportionale zwischen op und oq sein muss. Beschreibt man also über pq als Durchmesser einen Halbkreis, so ist, für o als Augenpunkt, die Ordinate $os = ov$ genommen die nöthige Distanz und v der Distanzpunkt.

2) Soll $ABCD$ ein Rhombus werden, so müssen sich die Diagonalen AC und BD rechtwinklich schneiden. Setzen wir wieder die unbekannte Distanz $ov = t$, $fo = y$, $go = y'$, W. $B'DE = \psi$ und W. $D'BE = \psi'$, so ist ähnlich wie früher

$$\frac{t}{y}=\tan\psi,\ \frac{t}{y'}=\tan\psi';$$

und da $\psi'=90^0-\psi$ sein muss:

$$\frac{t}{y}=\tan\psi,\ \frac{t}{y'}=\cot\psi;$$

woraus

$$t^2=yy',\ t=\sqrt{yy'}$$

folgt. Wenn also o beliebig auf fg genommen wird, so muss die Distanz $os=ov$ die mittlere Proportionale zwischen fo und go sein. Beschreibt man also über fg als Durchmesser einen Halbkreis, so ist für jeden beliebig zwischen f und g genommenen Augenpunkt o die Ordinate os die Distanz, also v der Distanzpunkt, wenn $ov=os$ gemacht wird.

3) Soll endlich $ABCD$ ein Quadrat werden, so müssen beide bisher gefundenen Bedingungen gleichzeitig statt finden. Fällt man also von dem Durchschnitte s beider Halbkreise über pq und fg eine Senkrechte so auf den Horizont, so ist o der Augenpunkt und, wenn $ov=os$ genommen wird, v der Distanzpunkt.

Hat man in jedem Falle Augen- und Distanzpunkt bestimmt, so lassen sich nun leicht nach dem am Ende des vorigen Paragraphen gezeigten Verfahren die den gegebenen Punkten a, b, c, d entsprechenden A, B, C, D auffinden.

§. 4.

Wir wollen uns jetzt mit den perspektivischen Projektionen des Kreises beschäftigen. Zu grösserer Einfachheit setzen wir voraus, dass der Mittelpunkt des zu projizirenden Kreises in (E) auf der verlängerten Augenhöhe liege (Taf. IV. Fig 1.) und dass der Kreis die Grundlinie mn berühre. Nehmen wir, wie bisher, die Augenhöhe und deren Verlängerung zur Abscissenachse und den Durchschnitt derselben mit der Grundlinie mn zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Gleichung des gegebenen Kreises in (E)

$$Y^2=2RX-X^2, \tag{7}$$

wobei R den Halbmesser desselben bezeichnet.

Um jetzt die Gleichung der Projektion unseres Kreises zu finden, brauchen wir bloss die Gleichungen (3) und (4) in Anwendung zu bringen, durch welche statt der Coordinaten X, Y in (E) die neuen Coordinaten x, y in (c) eingeführt werden. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{uy}{t-x}\right)^2=\frac{2Rtx}{t-x}-\left(\frac{tx}{u-x}\right)^2,$$

und nach einer leichten Reduction:

$$y^2=\frac{1}{u^2}[2Rutx-(2Rt+t^2)x^2],$$

Substituiren wir diess in Nr. (4), so ist jetzt der Werth der re
ten Seite in (3) gleich

$$2\left\{\int_0^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz+\int_{+a}^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz\right\}=2\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz.$$

Man kennt aber die Formel

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man darin $x=tz$, so erhält man unter der Voraussetzu
eines positiven t *)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz=\frac{\pi}{2},$$

und mithin ist der Werth der rechten Seite von (3) $=\pi$. So wird

$$-\cos at.\frac{du}{dt}-a\sin at.u=\frac{\pi}{2}.$$

Um diese Differenzialgleichung zu integriren, setzen wir

$$u=\cos at.v,$$

wo v eine noch unbekannte Funktion von t bedeutet, wodurch s
ergiebt

$$-\cos at(\cos at.\frac{dv}{dt}-a\sin at.v)-a\sin at\cos at.v=\frac{\pi}{2},$$

oder einfacher

$$-\cos^2 at.\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{2},$$

mithin

$$v=-\frac{\pi}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 at}=-\frac{\pi}{2}.\frac{\tan at}{a}+C,$$

indem C die Integrationsconstante bezeichnet. Nach (5) ist

$$u=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at,$$

oder nach Nr. (1)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at;$$

und ebenso ist

---

*) Für negative t werden nämlich die Integrationsgränzen: 0
$-\infty$ statt 0 und $+\infty$.

Donc le théorème I. sera réduit au suivant.

Théorème II. Soient f_x et F_x les mêmes fonctions que dans le théor. I. Soit de plus, pour abréger,

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}},$$

k étant un nombre entier. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

Maintenant il ne sera pas difficile d'étendre ces theorèmes au cas où la fonction f_x sera d'un degré supérieur à celui de F_x. Pour cela nous remarquons que, lorsqu'on pose

$$\varphi_x = (x-r_0)^s F_x, \tag{9}$$

r_0 étant une quantité quelconque indépendante de x, et s un nombre entier et positif, on pourra prendre s assez grand pour que φ_x soit d'un degré supérieur à celui de f_x. Donc, si la fonction F_x est donnée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s) étant un nombre entier et positif, ou égal à zéro, si l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'aura pas une racine r_0, on aura, en vertu de l'équation (9),

$$\varphi_x = (x-r_0)^{n_0} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m}.$$

En appliquant le théorème II., on obtiendra

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_x}{x-r_k},$$

R_k étant déterminé par l'équation

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}};$$

d'où l'on conclut, en ayant égard à l'équation (9),

$$\frac{f_x}{F_x} = (x-r_0)^s \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete d perspektivischen Projektion.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betra tung der perspektivischen Projektionen verschiedener Geb gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschie ner Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen metrische Relationen. In der That ist die harmonische Prop tion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht stört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Str büschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion m oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind a oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es ni ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elem taren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander se rechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen woll Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein liebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welch der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projekti des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, zieh wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und s zen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die La des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht st henden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coo dinaten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

$$PM : MN = Vv : vN,$$

d. i.

$$X : Y - y = t : y,$$

woraus man findet

$$y = \frac{tY}{t+X}.$$

Nun ist auch

$$Vv : PM = VN : PN,$$

d. i.

$$t : X = VN : PN;$$

mithin

$$t + X : X = VN + PN : PN$$
$$= VP : PN.$$

Aus $\Delta OVP \sim \Delta pNP$ fliesst aber:

$$VP : PN = OV : pN$$
$$= u : x.$$

Substituirt man diese Proportion in die vorhergehende, so hat man:

$$t + X : X = u : x,$$

folglich

$$x = \frac{uX}{t+X}.$$

Aus den beiden gefundenen Formeln:

$$x = \frac{uX}{t+X}, \tag{1}$$

$$y = \frac{tY}{t+X} \tag{2}$$

kann man leicht auch die umgekehrten

$$X = \frac{tx}{u-x}, \tag{3}$$

$$Y = \frac{uy}{u-x} \tag{4}$$

ableiten, und zwar (3) aus (1) und dann (4) aus (2) und (3).

Mit Hülfe der Formeln (1) und (2) kommt man von den Gebilden der Ebene (E) auf die der Ebene (e) und durch die folgenden (3), (4) von diesen auf jene. Bemerkenswerth ist noch, dass in dem Ausdrucke für x die Ordinate Y nicht vorkommt. Lassen

wir daher bei unveränderten u, t, X bloss Y sich ändern, so wird P als Endpunkt von MP eine Gerade beschreiben, welche der Grundlinie mn in der Entfernung MP parallel läuft. Dabei wird sich nun nach Formel (2) y ändern, aber nach Formel (1) x immer constant bleiben, d. h. der Endpunkt p der Geraden x wird eine Gerade beschreiben, welche der mn in der Entfernung Np parallel geht. Also: die Projektion einer Parallelen zur Grundlinie ist wieder eine solche Parallele.

Um nun auch die Projektionen anderer Geraden, welche der Grundlinie nicht parallel laufen, sondern einen beliebigen Winkel mit ihr machen, aufzufinden, brauchen wir bloss die Projektionen zweier auf ihr liegender Punkte aufzusuchen und die gefundenen durch eine Gerade zu verbinden. Denn man übersieht leicht, dass die Projektion einer Geraden selbst eine Gerade sein muss.

Es schneide nun die Gerade CP (Taf. III. Fig. 3.) die Grundlinie mn unter dem Winkel $PCM=\varphi$, wobei wir C als Anfangs-, P als Endpunkt der Geraden betrachten, so ist C die Projektion seiner selbst, weil dieser Punkt beiden Ebenen (E) und (e) zugleich angehört, und es handelt sich folglich bloss noch um die Projektion p des Endpunktes der Geraden, dessen Coordinaten X und Y wir jetzt durch den Winkel φ auszudrücken haben. Setzen wir demnach $Cv=k$, $CP=z$, so ist:

$$MP=X=z\sin\varphi,\quad Mv=Y=k+z\cos\varphi.$$

Durch diese Substitutionen erhält man aus den Formeln (1) u. (2):

$$x=\frac{uz\sin\varphi}{t+z\sin\varphi}=u-\frac{ut}{t+z\sin\varphi},$$

$$y=\frac{tk+tz\cos\varphi}{t+z\sin\varphi}=t\cot\varphi+\frac{kt-t^2\cot\varphi}{t+z\sin\varphi}.$$

Lassen wir jetzt z in's Unendliche wachsen, d. h. die Linie CP in's Unendliche fortlaufen, und gehen zur Gränze für $z=\infty$ über, so erhalten wir

$$x=u,\quad y=t\cot\varphi, \tag{5}$$

d. h. geometrisch, die Projektion eines unendlich entfernten Punktes liegt auf einer durch o zu mn parallel gelegten Geraden, dem sogenannten Horizont, und die Projektion der unendlichen Geraden CPQ ist die endliche Gerade Cq. Der Punkt q wird gefunden, wenn man aus O eine Parallele zu CQ zieht, welche dem Horizonte im Punkte q begegnet.

Es ist noch zu bemerken, dass in den Formeln (5) das anfangs eingeführte $k=Cv$ nicht mehr vorkommt, dass mithin diese Entfernung auf die Lage des Punktes q gar keinen Einfluss hat. Ziehen wir daher in verschiedenen Entfernungen Cv, $C'v$, $C''v$, etc. die Geraden CQ, $C'Q'$, $C''Q''$, etc., so müssen die Projektionen derselben die Geraden Cq, $C'q$, $C''q$, etc. sein, d. h. die Projektionen einer Reihe von Parallellinien, welche die Grundlinie unter einem beliebigen Winkel >0 schneiden, bilden einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt im Horizonte liegt.

Es ist aber jedes Element ebenso oft in jeder der n Stellen vorhanden, als es in der ersten vorkommt (weil keiner der Stellen irgend ein Vorzug zusteht), daher muss hier

$$\text{I.}\quad \binom{n}{m}_A = n.\binom{n-1}{m}_C$$

sein; da nun gemäss *B*) gilt $\binom{n}{m}_C = \frac{m}{n}\binom{n}{m}_A$, so ist hier

$$\text{II.}\quad \binom{n}{m}_C = m.\binom{n-1}{m}_C, \text{ also}$$

$$\binom{n}{m}_C = m.\left(m\binom{n-2}{m}_C\right) = m^2\left(m\binom{n-3}{m}_C\right) = \ldots = m^p\binom{n-p}{m}_C,$$

wo $\binom{n-p}{m}_C$ einmal $= \binom{1}{m}_C$, also $(n-p)=1$, folglich $p=(n-1)$ werden muss.

Es ist aber $\binom{1}{m}_C = m$, weil m Elemente m Unionen geben; also wird

$$\text{III.}\quad \binom{n}{m}_C = m^{n-1}.m = m^n$$

= Anzahl der Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen beim Variiren mit unbeschränkten Wiederholungen.

Hieraus folgt: $\binom{n-1}{m}_C = m^{n-1}$, und man hat also auch:

$$\text{IV.}\quad \binom{n}{m}_A = n.\binom{n-1}{m}_C = n.m^{n-1}.$$

δ) *Combinationen ohne Wiederholungen.*

Bildung der $n$ten Klasse.

10. Wenn man eines der m Elemente an alle Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus den $(m-1)$ übrigen Elementen ansetzt, so erhält man sämmtliche Complexionen der $n$ten Klasse. Man hat also für die Anzahl, welche angibt, wie oft dieses, folglich jedes Element, in der $n$ten Klasse gebraucht wird, die Gleichung:

$$\text{I.}\quad \binom{n}{m}_A = \binom{n-1}{m-1}_C;$$

a nun gemäss *B*):

d'où il suit, eu égard à la formule (3) II.,

$$\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,F_{r_k}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1}}=0.$$

En substituant à F_{r_k} sa valeur tirée de l'équation (11), on trouv

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}\frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}=0,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{s=0}^{s=n+1}\frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}\left\{a_s\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}\right\}=0,$$

et, suivant l'équation (8),

$$(12)\qquad \sum_{s=0}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s}=0.$$

Enfin on conclut de la précédente

$$\sum_{s=0}^{s=h+1}a_s\,B_{h-s}=-\sum_{s=h+1}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s},$$

ce qui change l'équation (10) en

$$(13)\qquad b_h=-\sum_{s=h+1}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s},$$

d'où l'on tire successivement

$$(14)\quad -\begin{cases} -\,b_{n-1}=a_n\,B_{-1},\\ -\,b_{n-2}=a_{n-1}\,B_{-1}+a_n\,B_{-2},\\ -\,b_{n-3}=a_{n-2}\,B_{-1}+a_{n-1}\,B_{-2}+a_n\,B_{-3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\,b_{n-h}=a_{n-h+1}B_{-1}+a_{n-h+2}B_{-2}+a_{n-h+3}B_{-3}+\ldots+a_n \end{cases}$$

Les formules (9) ou (14) peuvent servir à l'évaluation
coefficients $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$, lorsque les coefficients $a_0, a_1, \ldots$
et les sommes $B_0, B_1, B_2, \ldots B_{-1}, B_{-2}, B_{-3}, \ldots$ determi
par l'équation (8), sont connus. Réciproquement on en dédu
valeur des sommes, et par suite les coefficients du développe

(7), lorsque les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$, c'est-à-dire les fonctions F_x et f_x, sont données. Il y a plus: les formules (9) ou (14) conduisent même à la détermination des coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$. En effet l'équation (8) jointe à l'équation (6) II. donne

$$B_{h-1} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} f_{r_k}. \tag{15}$$

Supposons maintenant qu'entre les fonctions f_x et F_x il y ait la relation

$$f_x = \partial_x F_x, \tag{16}$$

et que, pour cette valeur particulière de f_x, B_{h-1} se change en A_h. On aura

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k} F_{r_k} \right\}. \tag{17}$$

Or, la fonction F_x étant toujours représentée par l'équation (2) ou (3), il suit

$$\partial_{r_k}^{p} F_{r_k} = 0,$$

le nombre entier et positif p vérifiant la condition

$$p < n_k.$$

Donc, ayant égard à la formule (3) II., on déduit de l'équation (17)

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k}^{n_k-1} \partial_{r_k} F_{r_k},$$

ou

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, r_k^{-h}. \tag{18}$$

Ajoutons que pour ce cas-ci les formules (10) et (13) se réduisent à

$$b_h = \sum_{s=0}^{s=h+1} a_s A_{h+1-s}, \quad b_h = -\sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s A_{h+1-s},$$

d'où

$$b_{h-1} = \sum_{s=0}^{s=h} a_s A_{h-s}, \quad b_{h-1} = -\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s A_{h-s}, \tag{19}$$

que de plus l'équation (16) jointe aux équations (3) et (4) établit entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ les relations

Da nun allgemein gemäss *B*) und *A*):

$$\binom{n}{m}=\frac{m}{n}\binom{n}{m} \text{ oder } \binom{n}{m}=\frac{n}{m}\binom{n}{m},$$

so muss auch

$$\binom{n-1}{m}=\frac{n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m},$$

mithin

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\frac{n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m}=\left(1+\frac{n-1}{m}\right)\binom{n-1}{m}=\frac{m+n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m}$$

sein; also gemäss *B*):

$$\binom{n}{m}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m+n-1}{m}\binom{n-1}{m}\right),$$

folglich

$$\text{II.}\quad \binom{n}{m}=\frac{m+n-1}{n}\cdot\binom{n-1}{m}.$$

Es ist also

$$\binom{n}{m}=\frac{m+n-1}{n}\cdot\frac{m+n-2}{n-1}\cdot\binom{n-2}{m}=\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{n\,.\,(n-1)}\cdot\frac{m+n-3}{n-2}\binom{n-3}{m}$$

$$=\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots.(m+n-p)}{n\,.\,(n-1)\ldots.(n-(p-1))}\cdot\binom{n-p}{m},$$

wo, wenn $\binom{n-p}{m}=\binom{1}{m}=m$ wird, auch $n-p=1$, also $p=n-1$, mithin auch $m+n-p=m+1$ und $n-(p-1)=2$ werden muss, so dass

$$\text{III.}\quad \binom{n}{m}=\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots.(m+1)\,.\,m}{n\,.\,(n-1)\ldots.2\,.\,1}$$

ist, welcher Formel man auch folgende beide Gestalten geben kann:

$$\odot)\ \binom{n}{m}=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots.n}$$

und

$$\supset)\ \binom{n}{m}=\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots.(n+m-1)}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$\Bigg\}=\begin{array}{l}\text{Anzahl der Complexionen der } n\text{ten}\\ \text{Klasse aus } m \text{ Elementen beim Combiniren}\\ \text{mit unbeschränkten}\\ \text{Wiederholungen,}\end{array}$$

wo wieder ⊙) bequemer ist als ⊃), wenn $n<(m-1)$ und umgekehrt.

Da nun nach *A*)

$$\binom{n}{m}=\frac{n}{m}\binom{n}{m},$$

so ist nach ⊙)

$$\text{IV}a.\quad \binom{n}{m}_A = \frac{n}{m}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

oder nach ☽)

$$\text{IV}b.\quad \binom{n}{m}_A = \frac{n}{m}\cdot\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots(m-1)} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

14. Aus I. unter 13., d. h. aus der Gleichung:

$$\binom{n}{m}_A = \binom{n-1}{m}_C + \binom{n-1}{m}_A$$

folgt:

$$\binom{n-1}{m}_A = \binom{n-2}{m}_C + \binom{n-2}{m}_A;$$

mithin ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{m}_A &= \binom{n-1}{m}_C + \binom{n-2}{m}_C + \binom{n-2}{m}_A \\ &= \binom{n-1}{m}_C + \binom{n-2}{m}_C + \binom{n-3}{m}_C + \binom{n-3}{m}_A \\ &\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &= \binom{n-1}{m}_C + \binom{n-2}{m}_C + \binom{n-3}{m}_C + \ldots + \binom{n-p}{m}_C + \binom{n-p}{m}_A,\end{aligned}$$

, wenn $n-p=1$ wird, auch $\binom{n-p}{m}_A = 1$ ist, so dass

$$\binom{n}{m}_A = 1 + \binom{1}{m}_C + \binom{2}{m}_C + \binom{3}{m}_C + \ldots + \binom{n-1}{m}_C$$

$$= 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

ist also die Summe der Reihe:

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)m)+3)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m},$$

Die Reihe δ) ist die gemeinschaftliche allgemeine Form für folgende bekanntlich höchst wichtige Reihen:

	1stes	2tes	3tes	4tes	*n*tes Glied	Summe der Reihe.
$m=1$	1	1	1	1	1	$\frac{n}{1}$
$m=2$	1	2	3	4	$\frac{n}{1}$	$\frac{n(n+1)}{1.2}$
$m=3$	1	3	6	10	$\frac{n(n+1)}{1.2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
$m=4$	1	4	10	20	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
$m=5$	1	5	15	35	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
$m=m$	1	$\frac{m}{1}$	$\frac{m(m+1)}{1.2}$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$	$\frac{m(m+1)....(m+n-2)}{1.2....(m-1)}$ oder $\frac{n(n+1)....(n+m-2)}{1.2....(n-1)}$	$\frac{m(m+1)(m+2)...(m+n-1)}{1.2.3...(n-1)}$ oder $\frac{n(n+1)(n+2)....(n+m-1)}{1.2.3....(m-1)}$

XXXIII.

Ueber die Auflösung der Gleichung $ax+by+cz=0$, wo a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, in ganzen Zahlen.

Aus einer Abhandlung von Cauchy (Exercices de Mathématiques. 9me Livraison) ausgezogen

von

dem Herausgeber.

Wenn man in den Formeln

$$1)\quad \begin{cases} x=bw-cv, \\ y=cu-aw, \\ z=av-bu \end{cases}$$

für u, v, w beliebige ganze Zahlen setzt, so erhält man, wovon man sich durch ganz leichte Rechnung auf der Stelle überzeugt, allemal eine Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen. Vorzüglich kommt es nun aber hierbei darauf an, dass man zeigt, dass die Gleichungen 1) auch alle Auflösungen der vorhergehenden Gleichung in ganzen Zahlen liefern, welche es geben kann, was bei dieser Untersuchung bei Weitem die Hauptsache ist.

Um diesen Beweis zu führen, wollen wir, was offenbar jederzeit verstattet ist, annehmen, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c die Einheit sei, oder dass diese Grössen relative Primzahlen seien. Sind nun, dies vorausgesetzt, X, Y, Z drei ganze Zahlen, durch welche die Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

Substituiren wir diess für die linke Seite von (1) und auf der rechten Seite die aus (3) für $p=1, 2, \ldots n$ sich ergebenden derivirten Funktionen, so wird, nach Hebung von $x^{-\lambda\mu-n}$,

$$(-1)^n [\lambda\mu]^n = -A_1 [\mu]^1 + A_2 [\mu]^2 - A_3 [\mu]^3 + \ldots + (-1)^n A_n [\mu]^n,$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$[\lambda\mu]^n = A_n [\mu]^n - A_{n-1} [\mu]^{n-1} + A_{n-2} [\mu]^{n-2} - \ldots \pm A_1 [\mu]^1. \quad (4)$$

Diese Gleichung lehrt die Fakultät der Wurzel $\lambda\mu$ durch die Fakultäten der Wurzel μ ausdrücken und dürfte in dieser Allgemeinheit einen nicht unwichtigen Beitrag zur Fakultätentheorie bilden.

In manchen speziellen Fällen kann man die endliche Reihe in (2), welche zur Bestimmung der Coeffizienten A dient, summiren; so findet man z. B.

1) für $\lambda=-1$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} \cdot (-1)^n (n-1)_q = (-1)^n (n-1)(n-2)\ldots(n-q) \cdot n_q,$$

folglich nach Nro. (4):

$$(\lambda)^n [-\mu]^n = [\mu]^n - (n-1) \cdot n_1 [\mu]^{n-1} + (n-1)(n-2) \cdot n_2 [\mu]^{n-2} - \ldots; \quad (5)$$

2) für $\lambda=2$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} (n-q)_q 2^{n-2q} = (q+1)(q+2)\ldots(2q) \cdot n_{2q} 2^{n-2q},$$

und daher nach Nro. (4):

$$\frac{1}{2^n} [2\mu]^n = [\mu]^n - \frac{2 \cdot n_2}{2^2} [\mu]^{n-1} + \frac{3.4 \cdot n_4}{2^4} [\mu]^{n-2} - \ldots, \quad (6)$$

3) für $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$A_{n-q} = \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q)},$$

und mithin

$$2^n [\tfrac{1}{2}\mu]^n = [\mu]^n + \frac{n(n-1)}{2} [\mu]^{n-1} + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{2.4} [\mu]^{n-2} + \ldots \quad (7)$$

Man kann diese Sätze auch in etwas anderer Form darstellen, wenn man mit Crelle folgendermassen bezeichnet:

$$\mu(\mu \pm \delta)(\mu \pm 2\delta)\ldots(\mu \pm \overline{n-1}\,\delta) = (\mu, \pm\delta)^n.$$

Es ergiebt sich dann leicht aus (5), (6) und (7):

$$(\mu,-1)^n = (\mu,+1)^n - (n-1)\,.\,n_1\,(\mu,+1)^{n-1} + (n-1)(n-2)\,.\,n_2\,(\mu,+1)^{n-2} - \ldots \Big\} \quad (8)$$

$$(\mu,+\tfrac{1}{2})^n = (\mu,+1)^n - \frac{2\,.\,n_2}{2^2}(\mu,+1)^{n-1} + \frac{3\,.\,4\,.\,n_4}{2^4}(\mu,+1)^{n-2} - \ldots \quad (9$$

$$(\mu,+2)^n = (\mu,+1)^n + \frac{n(n-1)}{2}(\mu,+1)^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\,.\,4}(\mu,+1)^{n-2} + \ldots \Big\} \quad (10)$$

Der letzte Satz hängt sehr genau mit dem Theoreme über ie Gamma-Funktionen zusammen, welches ich im 6ten Theile es Archivs. S. 218. Formel (10) bewiesen habe.

XXXVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Divisionsexempel.

Divisor: $1 \pm ax$,

Dividendus: $1 \mp x + (1-2a)x^2 \pm a(1-a+a^2)x^3$,

Quotient: $1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2$.

Man soll untersuchen, ob die quadratische Gleichung

$$1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2 = 0$$

elle oder imaginäre Wurzeln hat, und zugleich die Grösse

$$1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2$$

zwei reelle oder imaginäre Factoren des ersten Grades zerlegen.

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen darbietet, die allgemeinen Werthe von x, y, z, welche diese Gleichung in ganzen Zahlen auflösen, auch unter der Form

$$(1)\quad \begin{cases} x=x_0+bw-cv, \\ y=y_0+cu-aw, \\ z=z_0+av-bu \end{cases}$$

dargestellt werden können.

XXXIV.

Ueber die Cycloide als Brachystochrone.

Von

dem Herausgeber.

Bei Vorträgen über die höhere Mechanik wird man ausser der Kenntniss der Differentialrechnung und der Integralrechnung, welche natürlich unerlässlich ist, bei allen Zuhörern nicht immer auch die Kenntniss der Variationsrechnung voraussetzen können. Und wenn nun auch allerdings die Aufgabe von der Brachystochrone *) ein recht eigentlich dieser letzteren Wissenschaft angehörendes Problem ist, so scheint es aus dem angegebenen Grunde und wegen des grossen Interesses der Aufgabe an sich, doch wünschenswerth, im Besitz einer die Anwendung der Variationsrechnung nicht in Anspruch nehmenden Auflösung derselben zu sein, die ich daher im Folgenden zu geben versuchen werde, wobei ich aber bemerken muss, dass diese Auflösung wenigstens in Rücksicht des ihr vorzüglich zum Grunde liegenden Princips mit der von Jacob Bernoulli gegebenen Auflösung nahe verwandt ist.

*) Wir betrachten hier nur den Fall einer Bewegung im luftleeren Raume oder überhaupt in einem nicht widerstehenden Mittel.

Die Aufgabe selbst kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

*Wenn A und B in Taf. V. Fig. 4. zwei gegebene Punkte sind, so soll man die diese beiden Punkte mit einander verbindende Curve von einfacher Krümmung *) bestimmen, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt.*

Die Auflösung dieser interessanten Aufgabe, welche wir im Folgenden geben werden, gründet sich vorzüglich auf das folgende Prinzip.

Wenn die in der Figur verzeichnete Curve AB die gesuchte ist, auf welcher also ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt, so wird auch jedes Stück ab dieser Curve von dem schweren Punkte, welcher in a mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommt, in der kürzesten Zeit durchlaufen. Gäbe es nämlich ein anderes Curvenstück acb, welches, dieselbe Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt, in einer kürzeren Zeit als ab durchlaufen würde, so würde doch bB noch in derselben Zeit durchlaufen werden, weil nach einem aus der Mechanik bekannten Satze die in dem Punkte b erlangte Geschwindigkeit des sich bewegenden schweren Punktes dieselbe ist, dieser Punkt mag sich auf ab oder auf acb bewegen, indem diese Geschwindigkeit bekanntlich bloss von der vertikalen Entfernung der beiden Punkte A und b von einander abhängt, welche in beiden Fällen dieselbe ist. Also würde offenbar der schwere Punkt auf dem Wege $AacbB$ in einer kürzeren Zeit als auf dem Wege $AabB$ oder AB von A bis B gelangen, was gegen die Voraussetzung streitet, wodurch folglich unsere obige Behauptung gerechtfertigt ist.

Ferner gründet sich unsere Auflösung der Aufgabe von der Brachystochrone noch auf das folgende Problem, welches wir daher vorher auflösen müssen.

In Taf. V. Fig. 5. sei CD eine gegebene gerade Linie, und M und N seien zwei auf verschiedenen Seiten derselben liegende gegebene Punkte. Man soll in der Linie CD den Punkt P so bestimmen, dass, wenn man die Linien MP und NP zieht, und a und b zwei gegebene Zahlen bezeichnen, die Grösse

$$\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

ein Minimum werde.

Von M und N fälle man auf CD die Perpendikel MM' und und NN', und setze als gegebene Grössen $MM'=m$, $NN'=n$ und $M'N'=e$. Ferner bezeichne man die, jenachdem der Punkt P von M' aus nach N' oder nach der entgegengesetzten Seite hin liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des Punktes P von dem Punkte M' durch x, so ist

$$MP=\sqrt{m^2+x^2},\quad NP=\sqrt{n^2+(e-x)^2},$$

---

*) Diese Bedingung ist hier absichtlich gemacht worden.

und folglich, wenn wir

$$y=\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

setzen:

$$y=\frac{\sqrt{m^2+x^2}}{a}+\frac{\sqrt{n^2+(e-x)^2}}{b}.$$

Entwickeln wir nun den ersten Differentialquotienten dieser Grösse, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{a\sqrt{m^2+x^2}}-\frac{e-x}{b\sqrt{n^2+(e-x)^2}},$$

woraus sich als gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums die Gleichung

$$\frac{x}{a\sqrt{m^2+x^2}}=\frac{e-x}{b\sqrt{n^2+(e-x)^2}}$$

ergiebt.

Weil hiernach

$$\frac{x}{e-x}=\frac{a\sqrt{m^2+x^2}}{b\sqrt{n^2+(e-x)^2}}$$

ist, so ist

$$\frac{x}{e-x}$$

stets eine positive Grösse, und x und $e-x$ haben daher immer gleiche Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass stets x positiv und $x<e$ ist, folglich der Punkt P immer zwischen M' und N' liegt.

Entwickeln wir den zweiten Differentialquotienten von y, so erhalten wir

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{m^2}{a(m^2+x^2)\sqrt{m^2+x^2}}+\frac{n^2}{b(n^2+(e-x)^2)\sqrt{n^2+(e-x)^2}},$$

welches offenbar immer eine positive Grösse und daher die Bedingung des Minimums erfüllt ist.

Da offenbar

$$MP=\sqrt{m^2+x^2},\ NP=\sqrt{n^2+(e-x)^2};$$
$$MP=x,\ NP=e-x$$

ist; so ist nach dem Obigen

$$\frac{M'P}{a.MP}=\frac{N'P}{b.NP}$$

die Bedingung des Minimums. Bezeichnen wir aber die Winkel MPM' und NPN' respective durch α und β, so ist

$$M'P=MP.\cos\alpha,\ N'P=NP.\cos\beta;$$

also

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}$$

oder

$$\cos\alpha:\cos\beta=a:b$$

die Bedingung des Minimums.

Bezeichnen a und b die Geschwindigkeiten, mit denen ein Punkt auf MP und NP sich gleichförmig bewegt, so sind $\frac{MP}{a}$ und $\frac{NP}{b}$ die Zeiten, in denen die Wege MP und NP zurückgelegt werden, und

$$\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

ist folglich die Zeit, in welcher der Weg MPN zurückgelegt wird. Daher ergiebt sich aus dem Vorhergehenden der folgende Satz:

Wenn ein Punkt in den Linien MP und NP mit den Geschwindigkeiten a und b sich gleichförmig bewegt und der Punkt P in CD eine solche Lage haben soll, dass unter dieser Voraussetzung der sich bewegende Punkt auf dem Wege MPN in der kürzesten Zeit von M nach N gelangt; so müssen die Cosinus der Winkel MPD und NPC sich wie die Geschwindigkeiten a und b in den Linien MP und NP verhalten,

Hiervon lässt sich nun die folgende Anwendung auf die Bestimmung der Brachystochrone für den Fall schwerer Punkte machen.

Die Curve AB in Taf. V. Fig. 6. (M. vergl. Taf. V. Fig. 4.) denke man sich in eine so grosse gerade Anzahl so kleiner Theile getheilt, dass man ohne merklichen Fehler jedes dieser Theilchen als eine gerade Linie und die Bewegung in einem jeden derselben als gleichförmig betrachten kann. Durch den Punkt A und alle Theilpunkte denke man sich horizontale Linien gezogen, und bezeichne die Neigungswinkel der geradlinigen Elemente

$$Ab_1,\ b_1b_2,\ b_2b_3,\ b_3b_4,\ b_4b_5,\ \ldots.$$

gegen diese horizontalen Linien respective durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

Denken wir uns dann ferner durch alle Theilpunkte die vert kalen Linien

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4,\ a_5b_5,\ \ldots.$$

gezogen, so sind nach bekannten Sätzen die durch den Fall a AB in

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ \ldots.$$

erlangten Geschwindigkeiten respective:

$$2\sqrt{g.a_1b_1},\ 2\sqrt{g.a_2b_2},\ 2\sqrt{g.a_3b_3},\ 2\sqrt{g.a_4b_4},\ \ldots.;$$

wo g seine bekannte Bedeutung hat.

Nach dem oben zuerst ausgesprochenen Princip gelangt d schwere Punkt auf der Curve AB mit der in dem $n$ten u $(n+1)$sten Theilpunkte erlangten Geschwindigkeit in der kürzest Zeit von dem $n$ten bis zum $(n+2)$ten Theilpunkte, und wir hab daher nach dem oben bewiesenen Satze in den vorher eingeführt Bezeichnungen offenbar die folgenden Proportionen:

$$\cos\alpha:\cos\alpha_1=0:2\sqrt{g.a_1b_1}=0:\sqrt{a_1b_1},$$

$$\cos\alpha_1:\cos\alpha_2=2\sqrt{g.a_1b_1}:2\sqrt{g.a_2b_2}=\sqrt{a_1b_1}:\sqrt{a_2b_2},$$

$$\cos\alpha_2:\cos\alpha_3=2\sqrt{g.a_2b_2}:2\sqrt{g.a_3b_3}=\sqrt{a_2b_2}:\sqrt{a_3b_3},$$

$$\cos\alpha_3:\cos\alpha_4=2\sqrt{g.a_3b_3}:2\sqrt{g.a_4b_4}=\sqrt{a_3b_3}:\sqrt{a_4b_4},$$

u. s. w.

Da nun die einzelnen Elemente der Curve mit den entsprechen den Berührenden derselben als zusammenfallend betrachtet werd können, so sind offenbar

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

die von den Berührenden der Curve in den Punkten

$$A,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots.$$

mit der durch A gezogenen horizontalen Linie AC, welche w als den positiven Theil der Abscissenaxe und A also als den A fang der Abscissen annehmen wollen, eingeschlossenen Winke und wenn wir nun überhaupt zwei dieser Winkel durch Θ, und die Ordinaten der entsprechenden Punkte der Curve dur y, y' bezeichnen, so erhellet aus dem Obigen unmittelbar d Richtigkeit der Proportion

$$\cos\Theta:\cos\Theta'=\sqrt{y}:\sqrt{y'}$$

oder die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}=\frac{\cos\Theta'}{\sqrt{y'}},$$

woraus sich ergiebt, dass

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}$$

eine constante Grösse ist, die wir durch $\sqrt{a}$ bezeichnen, und daher

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}} = \sqrt{a}$$

setzen wollen. Aus dieser Gleichung ergiebt sich mittelst leichter Rechnung

$$\text{tang}\,\Theta = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}},$$

und da nun nach den Principien der höheren Geometrie

$$\text{tang}\,\Theta = \frac{dy}{dx}$$

ist, so erhalten wir als Differentialgleichung unserer Curve die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}}$$

oder

$$dx = dy\sqrt{\frac{ay}{1-ay}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man

$$ay = \sin\omega^2,\ 1-ay = \cos\omega^2\ ^*),$$

so ist

$$dx = \text{tang}\,\omega\ .\ dy.$$

Weil aber

$$ady = 2\sin\omega\cos\omega\,d\omega$$

ist, so ist

$$dx = \frac{2}{a}\sin\omega^2\,d\omega,$$

---

*) Es ist hier absichtlich der vorhergehende Winkel Θ nicht weiter berücksichtigt und ω nur als eine Hülfsgrösse zur Erleichterung der Integration eingeführt worden.

und folglich

$$x = \frac{2}{a}\int \sin\omega^2\, d\omega + \text{Const.}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int \sin\omega^2\, d\omega &= \sin\omega \int \sin\omega\, d\omega - \int d\sin\omega \int \sin\omega\, d\omega \\ &= \sin\omega \int \sin\omega\, d\omega - \int \cos\omega\, d\omega \int \sin\omega\, d\omega \\ &= -\sin\omega\cos\omega + \int \cos\omega^2\, d\omega \\ &= -\sin\omega\cos\omega + \int (1-\sin\omega^2)\, d\omega \\ &= \omega - \sin\omega\cos\omega - \int \sin\omega^2\, d\omega,\end{aligned}$$

also

$$\int \sin\omega^2\, d\omega = \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\sin\omega\cos\omega,$$

und folglich

$$x = \frac{1}{a}(\omega - \sin\omega\cos\omega) + \text{Const.}$$

Also ist

$$\begin{aligned}ax &= \omega - \sin\omega\cos\omega + \text{Const.}, \\ ay &= \sin\omega^2;\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}2ax &= 2\omega - 2\sin\omega\cos\omega + \text{Const.}, \\ 2ay &= 2\sin\omega^2;\end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned}2ax &= 2\omega - \sin 2\omega + \text{Const.}, \\ 2ay &= 1 - \cos 2\omega.\end{aligned}$$

Für $y=0$ ist nach dem Obigen offenbar auch $x=0$. Für $y=0$ ist aber

$$1 - \cos 2\omega = 0 \text{ oder } \cos 2\omega = 1,$$

und folglich, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $2\omega = 2k\pi$. Also ist nach dem Obigen

$$0 = 2k\pi - \sin 2k\pi + \text{Const.} = 2k\pi + \text{Const.},$$

d. i. $\text{Const.} = -2k\pi$, und folglich

$$\begin{aligned}2ax &= 2\omega - 2k\pi - \sin 2\omega, \\ 2ay &= 1 - \cos 2\omega.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\sin(2\omega - 2k\pi) = \sin 2\omega, \quad \cos(2\omega - 2k\pi) = \cos 2\omega.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$2ax = 2\omega - 2k\pi - \sin(2\omega - 2k\pi),$$
$$2ay = 1 - \cos(2\omega - 2k\pi);$$

und folglich, wenn man überhaupt

$$\varphi = 2\omega - 2k\pi$$

setzt:

$$2ax = \varphi - \sin\varphi, \quad 2ay = 1 - \cos\varphi;$$

oder für $\frac{1}{2a} = r$:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Im Anfange der Bewegung müssen x und y beide zugleich verschwinden, welches offenbar nur für $\varphi = 0$ möglich ist, da nur für diesen Werth von φ die Differenz $\varphi - \sin\varphi = 0$, d. i. $\sin\varphi = \varphi$ sein kann. Also hat man für den Anfang der Bewegung $\varphi = 0$ zu setzen. Wollte man φ negativ nehmen, so würde, weil der absolute Werth von φ immer grösser als der absolute Werth von $\sin\varphi$ ist, x negativ, da doch im Obigen x als positiv angenommen worden ist. Folglich muss man φ von 0 an zunehmen, nicht von 0 an abnehmen lassen, woraus sich wegen der Gleichungen

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi)$$

nun unmittelbar auf ganz unzweideutige Weise ergiebt, dass die gesuchte Curve eine gemeine Cycloide ist, deren erzeugender Kreis den Halbmesser $r = \frac{1}{2a}$ hat.

Wegen der aus dem Obigen sich ganz von selbst ergebenden wichtigen und merkwürdigen mechanischen Eigenschaft der gemeinen Cycloide nennt man dieselbe bekanntlich die Brachystochrone im luftleeren Raume.

XXXV.

Sur les fractions partielles.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

I.

Dans beaucoup de recherches analytiques il importe de décomposer une fonction rationelle et fractionnaire en fractions partielles, et, réciproquement, de réduire une somme de fractions partielles à une fonction fractionnaire. — Pour résoudre ce double problème dans toute sa généralité, nous désignons par F_x une fonction entière de x du degré n. Soient $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x. Alors, en supposant que cette équation contienne n_1 racines égales r_1, n_2 racines égales r_2, etc., on aura

$$F_x = A(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

ou, en prenant le coefficient constant A égal à l'unité,

$$(1) \qquad F_x = (x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m}.$$

Soient encore f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ des fonctions de x, liées entre elles et à la fonction F_x par l'équation

$$(2) \qquad \frac{f_x}{F_x} = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}.$$

Cela fait, on pourra toujours satisfaire à l'équation (2), en supposant les fonctions f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ entières par rapport à

x, et, respectivement, d'un degré inférieur à n, n_1, n_2, ... n_m. En effet, si l'on pose

$$(3) \qquad F_x = (x-r_k)^{n_k} Q_{x,k},$$

k étant un des nombres entiers $1, 2, \ldots m$, la fonction $Q_{x,k}$ sera entière par rapport à x du degré $n-n_k$, et le facteur $x-r_k$ n'y entrera pas. D'ailleurs on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}},$$

d'ou l'on déduit

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k} \frac{F_x}{(x-r_k)^{n_k}},$$

et, en vertu de l'équation (3),

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k}\ Q_{x,k},$$

ou

$$(4) \qquad f_x = P_{x,1}\, Q_{x,1} + P_{x,2}\, Q_{x,2} + \ldots + P_{x,m}\, Q_{x,m}.$$

Or, $Q_{x,k}$ étant du degré $n-n_k$, il suit que $P_{x,k}\ Q_{x,k}$ sera d'un degré inférieur à n, lorsqu'on suppose la fonction $P_{x,k}$ entière par rapport à x d'un degré inférieur à n_k. On voit donc que l'équation (4), ou l'équation (2), d'où elle est déduite, admet la supposition que les fonctions f_x et $P_{x,k}$ soient entières par rapport à x d'un degré inférieur à n et n_k, ensorte que l'on pourra faire

$$(5) \qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$(6) \qquad f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

$$(7) \qquad P_{x,k} = c_{0,k} + c_{1,k}(x-r_k) + c_{2,k}(x-r_k)^2 + \ldots + c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k-1}.$$

Il résulte de ce qui précède que, pour le problème de la composition, il s'agit de trouver les coefficients a_0, a_1, ... a_n et b_0, b_1, ... b_{n-1}, lorsque les quantités r_1, r_2, ... r_m et les fonctions $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, ... $P_{x,m}$ sont données; et, pour la décomposition, de trouver les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, ... $c_{n_k-1,k}$, lorsque les fonctions f_x et F_x sont données. — Commençons par la décomposition.

II.

En posant pour une fonction quelconque φ_x

$$\frac{d^n \varphi_x}{dx^n} = \partial_x^n\, \varphi_x,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Arc sin}\frac{x}{v}\\
&=\frac{1}{2}\tan\gamma\cdot\left[\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}.\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}.z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}.z}\right],\\
&\text{Arc cos}\frac{y}{v}\\
&=\frac{1}{2}\tan\gamma\cdot\left[\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}.\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}.z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}.z}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

die Gleichungen der Projectionen der gleichseitig-hyperboloidischen Loxodrome erster Art auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ.

Für diese Gleichungen hat man in anderer Form, wenn man zugleich den Ausdruck der Klammer mit G_1 bezeichnet, die folgenden:

$$x=y\tan(\frac{1}{2}\tan\gamma\,.\,G_1),$$

$$x=v\sin(\frac{1}{2}\tan\gamma\,.\,G_1),$$

$$y=v\cos(\frac{1}{2}\tan\gamma\,.\,G_1).$$

IV. Hyperboloidische Loxodrome zweiter Art.

Die bekannte Gleichung des zweimanteligen Rotationshyperboloids (à deux nappes), nämlich:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(z^2-b^2)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(21)$$

geht ebenfalls aus der des Rotationsellipsoids hervor, wenn in dieser $a=a\sqrt{-1}$ gesetzt wird. Wir gelangen also ebenso leicht zu den Gleichungen der Hyperboloidischen Loxodrome zweiter Art, indem wir in den für die Sphäroidische Loxodrome gewonnenen Ausdrücken $a\sqrt{-1}$ statt a nehmen. Alsdann erhält man, indem man die nach dem Anfangspunkt der Curve zu bestimmende Const. $=\frac{1}{2}\tan\gamma\,(\log B-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log B)$ setzt, folgende Gleichungen:

$$\text{Arc tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\tan\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}x)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}x}\right]\ldots\ldots(22)$$

die Gleichung der Wendelfläche des zweimantteligen Rotationshyperboloids, welche mit (21) verbunden zur Bestimmung der Hyperboloidischen Loxodrome der zweiten Art dient; und:

$$\left.\begin{aligned}\text{Arc sin}\frac{x}{a}&=\frac{1}{2}\tan\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}x)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}x}\right],\\ \text{Arc cos}\frac{y}{a}&=\frac{1}{2}\tan\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right],\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(23)$$

Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen und YZ, durch welche gemeinschaftlich ebenfalls die Hyperidische Loxodrome der zweiten Art bestimmt wird.

On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}.$$

On peut donner au théorème I. un autre énoncé par la considération suivante.

Soit U_x une fonction entière de x du degré n. On aura

$$U_x = \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{(x-r)^h}{h!}\, \partial_r^h\, U_r,$$

r étant une quantité quelconque. En mettant la précédente sous la forme

$$U_x = (x-r)^{n+1} \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{1}{h!} \frac{\partial_r^h\, U_r}{(x-r)^{n+1-h}},$$

et observant que, pour un nombre entier et positif p, on a

$$\frac{1}{(x-r)^p} = \frac{1}{(p-1)!}\, \partial_r^{p-1} \frac{1}{x-r},$$

il viendra

$$U_x = (x-r)^{n+1} \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{1}{h!\,(n-h)!}\, \partial_r^h\, U_r\, \partial_r^{n-h} \frac{1}{x-r},$$

équation qui, en vertu des formules (3) et (4), se réduit à

$$U_x = \frac{(x-r)^{n+1}}{n!}\, \partial_r^n \frac{U_x}{x-r}.$$

Or, cette équation subsistant pour toute fonction entière de degré n, quel que soit r, et $P_{x,k}$ étant du degré n_k-1, on aura pareillement

$$P_{x,k} = \frac{(x-r_k)^{n_k}}{(n_k-1)!}\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{P_{r_k,k}}{x-r_k},$$

d'où

$$\frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}} = \frac{1}{(n_k-1)!}\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{P_{r_k,k}}{x-r_k}, \tag{8}$$

ou, en mettant au lieu de $P_{r_k,k}$ sa valeur tirée de l'équation (6),

$$\frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}} = n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{1}{x-r_k} \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \right\}.$$

)onc le théorème I. sera réduit au suivant.

Théorème II. Soient f_x et F_x les mêmes fonctions que dans e théor. I. Soit de plus, pour abréger,

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}},$$

: étant un nombre entier. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

Maintenant il ne sera pas difficile d'étendre ces theorèmes au cas où la fonction f_x sera d'un degré supérieur à celui de F_x. Pour cela nous remarquons que, lorsqu'on pose

$$\varphi_x = (x-r_0)^s F_x, \tag{9}$$

r_0 étant une quantité quelconque indépendante de x, et s un nombre entier et positif, on pourra prendre s assez grand pour que φ_x soit d'un degré supérieur à celui de f_x. Donc, si la fonction F_x est donnée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s) étant un nombre entier et positif, ou égal à zéro, si l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'aura pas une racine r_0, on aura, en vertu de l'équation (9),

$$\varphi_x = (x-r_0)^{n_0} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m}.$$

En appliquant le théorème II., on obtiendra

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_x}{x-r_k},$$

R_k étant déterminé par l'équation

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}};$$

l'on conclut, en ayant égard à l'équation (9),

$$\frac{f_x}{F_x} = (x-r_0)^s \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

Or, r_0 étant une quantité quelconque, on peut faire

$$r_0 = 0,$$

d'où il suit

$$\frac{f_x}{F_x} = x^s \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k},$$

ou, puisque les signes Σ et ∂ ne se rapportent pas à x et s,

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{x^s}{x-r_k}. \tag{10}$$

Mais on a

$$\frac{x^s}{x-r_k} = \frac{r_k^s}{x-r_k} + r_k^{s-1} + x r_k^{s-2} + \ldots + x^{s-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x^s}{x-r_k} = \frac{r_k^s}{x-r_k} + \sum_{h=0}^{h=s} x^h r_k^{s-1-h};$$

donc l'équation (10) se réduit à

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \left\{ \frac{r_k^s}{x-r_k} + \sum_{h=0}^{h=s} x^h r_k^{s-1-h} \right\}.$$

Cette analyse conduit au théorème suivant.

Théorème III. Soit f_x une fonction rationelle et entière de du degré p.

Soit F_x une fonction rationelle et entière de x du degré représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s), n_1, n_2, $\ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, r_0, r_1, $\ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x, dont r_0 soit toujours égale à zéro, ensorte que $n_0 - s = 0$, lorsque l'équation $F_x = 0$ n'aura pas une racine égale à zéro.

Soit φ_x une fonction auxiliaire, liée à F_x par l'équation

$$\varphi_x = (x-r_0)^s F_x,$$

s étant un nombre entier et positif, pris de manière à satisfaire à la condition

$$s + q > p.$$

Soit enfin, pour abréger,

$$T_k = n_k \frac{r_k^s f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}},$$

h et k étant des nombres entiers et positifs. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\}.$$

Corollaire I. Si l'on a

$$q > p,$$

c'est-à-dire, si le degré de F_x est supérieur à celui de f_x, on satisfera à la condition

$$s + q > p,$$

en prenant $s = 0$: donc on reviendra au théor. II.

Corollaire II. Il sera souvent plus commode de séparer la partie correspondante à la quantité r_0 ou 0. Dans ce cas on trouvera

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\} + \sum_{h=0}^{h=n_0} \frac{n_0!}{h!} x^{s+h-n_0} \partial_{r_0}^{h} \frac{f_{r_0}}{\partial_{r_0}^{n_0} \varphi_{r_0}}.$$

Corollaire III. En posant

$$f_x = \psi_a + \frac{x-a}{1!} \partial_a \psi_a + \ldots + \frac{(x-a)^p}{p!} \partial_a^p \psi_a,$$

on aura pour une fonction quelconque ψ_x

$$\psi_x = f_x + \int_a^x \frac{(x-x')^p}{p!} \partial_{x'}^{p+1} \psi_{x'} \, dx'.$$

Donc, comme f_x est une fonction entière par rapport à x du degré p, on aura suivant le théor. III.

$$\frac{\psi_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\} + \frac{1}{F_x} \int_a^x \frac{(x-x')^p}{p!} \partial_{x'}^{p+1} \psi_{x'} \, dx'.$$

III.

D'après ce qui a été dit ci-dessus I., on a simultanément les équations

$$(1)\qquad \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}},$$

$$(2)\qquad F_x = (x-r_1)^{n_1}\,(x-r_2)^{n_2}\,\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

ou

$$(3)\qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$(4)\qquad f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

$$(5)\qquad P_{x,k} = c_{0,k} + c_{1,k}(x-r_k) + c_{2,k}(x-r_k)^2 + \ldots + c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k}$$

De plus, en vertu de l'équation (8) II., on a

$$(6)\qquad \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{x-r_k},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{f_x}{F_x} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{P_{r_k,k}}{(n_k-1)!}\left[\frac{1}{r_k} + \frac{x}{r^2} + \frac{x^2}{r_k^3} + \ldots + \frac{x^{s-1}}{r_k^s}\right] + R \right\}$$

R étant déterminé par l'équation

$$R = \frac{P_{r_k,k}}{(n_k-1)!}\,\frac{\left(\frac{x}{r_k}\right)^s}{r_k - x},$$

et s étant un nombre entier et positif, qu'on peut faire accroître jusqu'à l'infini. Or on reconnaît que le reste R s'évanouit pour des valeurs infiniment grandes de s, toutes les fois que le module de x sera inférieur au module de la plus petite des racines r; dans ce cas on aura donc

$$(7)\qquad \frac{f_x}{F_x} = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots,$$

en faisant, pour abréger,

$$(8)\qquad B_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1}}.$$

Il est évident que le second membre de l'équation (7) ne sera jamais convergent, lorsque parmi les racines r_k il y en aurait de zéro, sinon $P_{x,k}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n_k s'évanouissent

en même temps pour $x=0$. Mais on obvie à cet inconvénient par la séparation de la partie correspondante à cette racine, comme il a été remarqué dans le coroll. II. theor. III. En tout cas l'équation

$$f_x = F_x \{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots\}$$

subsiste, puisque les fonctions f_x et F_x sont entières par rapport à x. En mettant au lieu de F_x sa valeur de l'équation (3), il viendra

$$\begin{aligned} f_x = {} & a_0 B_0 + a_0 B_1 x + a_0 B_2 x^2 + \ldots + a_0 B_h x^h + \ldots \\ & + a_1 B_0 x + a_1 B_1 x^2 + \ldots + a_1 B_{h-1} x^h + \ldots \\ & + a_2 B_0 x^2 + \ldots + a_2 B_{h-2} x^h + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_h B_0 x^h + \ldots \\ & \ldots \end{aligned}$$

Cette expression de f_x, comparée à celle de l'équation (4), conduit à

$$(9) \quad \begin{cases} b_0 = a_0 B_0, \\ b_1 = a_0 B_1 + a_1 B_0, \\ b_2 = a_0 B_2 + a_1 B_1 + a_2 B_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_h = a_0 B_h + a_1 B_{h-1} + a_2 B_{h-2} + \ldots + a_h B_0, \end{cases}$$

ou, s étant un nombre entier,

$$(10) \qquad b_h = \sum_{s=0}^{s=h+1} a_s B_{h-s}.$$

On obtiendra une autre expression pour b_h de la manière suivante. D'abord on présente l'équation (3) sous la forme

$$(11) \qquad F_x = \sum_{s=0}^{s=n+1} a_s x^s.$$

Ensuite on déduit de l'équation (2) non seulement

$$\left.\begin{array}{l} F_{r_k} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (12)$$

mais encore

$$\partial_{r_k}^p F_{r_k} = 0,$$

étant un nombre entier et positif assujetti à la condition

$$p < n_k;$$

d'où il suit, eu égard à la formule (3) II.,

$$\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1} F_{r_k}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1}} = 0.$$

En substituant à F_{r_k} sa valeur tirée de l'équation (11), on trouve

$$\sum_{s=0}^{s=n+1} \frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}} = 0,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{s=0}^{s=n+1} \frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}\left\{a_s\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}\right\} = 0,$$

et, suivant l'équation (8),

$$\sum_{s=0}^{s=n+1} a_s\,B_{h-s} = 0. \tag{12}$$

Enfin on conclut de la précédente

$$\sum_{s=0}^{s=h+1} a_s\,B_{h-s} = -\sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s\,B_{h-s},$$

ce qui change l'équation (10) en

$$b_h = -\sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s\,B_{h-s}, \tag{13}$$

d'où l'on tire successivement

$$(14)\quad -\begin{cases} -\,b_{n-1} = a_n\,B_{-1}, \\ -\,b_{n-2} = a_{n-1}\,B_{-1} + a_n\,B_{-2}, \\ -\,b_{n-3} = a_{n-2}\,B_{-1} + a_{n-1}\,B_{-2} + a_n\,B_{-3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\,b_{n-h} = a_{n-h+1}B_{-1} + a_{n-h+2}B_{-2} + a_{n-h+3}B_{-3} + \dots + a_nB \end{cases}$$

Les formules (9) ou (14) peuvent servir à l'évaluation coefficients $b_0, b_1, \dots b_{n-1}$, lorsque les coefficients $a_0, a_1, \dots$ et les sommes $B_0, B_1, B_2, \dots B_{-1}, B_{-2}, B_{-3}, \dots$ determin par l'équation (8), sont connus. Réciproquement on en déduit valeur des sommes, et par suite les coefficients du développem

(7), lorsque les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$, c'est-à-dire les fonctions F_x et f_x, sont données. Il y a plus: les formules (9) ou (14) conduisent même à la détermination des coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$. En effet l'équation (8) jointe à l'équation (6) II. donne

$$B_{h-1} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} f_{r_k}. \tag{15}$$

Supposons maintenant qu'entre les fonctions f_x et F_x il y ait la relation

$$f_x = \partial_x F_x, \tag{16}$$

et que, pour cette valeur particulière de f_x, B_{h-1} se change en A_h. On aura

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k} F_{r_k} \right\}. \tag{17}$$

Or, la fonction F_x étant toujours représentée par l'équation (2) ou (3), il suit

$$\partial_{r_k}^{p} F_{r_k} = 0,$$

le nombre entier et positif p vérifiant la condition

$$p < n_k.$$

Donc, ayant égard à la formule (3) II., on déduit de l'équation (17)

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k}^{n_k-1} \partial_{r_k} F_{r_k},$$

ou

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, r_k^{-h}. \tag{18}$$

Ajoutons que pour ce cas-ci les formules (10) et (13) se réduisent à

$$b_h = \sum_{s=0}^{s=h+1} a_s A_{h+1-s}, \quad b_h = -\sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s A_{h+1-s},$$

d'où

$$b_{h-1} = \sum_{s=0}^{s=h} a_s A_{h-s}, \quad b_{h-1} = -\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s A_{h-s}, \tag{19}$$

que de plus l'équation (16) jointe aux équations (3) et (4) établissent entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ les relations

$$b_0 = a_1, \quad b_1 = 2\,a_2, \quad b_2 = 3\,a_3, \quad \ldots$$

en général

$$b_{h-1} = h a_h,$$

par la quelle les équations (19) deviendront

$$(20) \qquad h a_h = \sum_{s=0}^{s=h} a_s A_{h-s},$$

$$(21) \qquad h a_h = -\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s A_{h-s}.$$

D'ailleurs on a

$$\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s A_{h-s} = a_h A_0 + \sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s A_{h-s},$$

et de plus, en vertu des équations (20), (2) et (3),

$$-A_0 = \sum_{k=1}^{k=m+1} n_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n.$$

donc la formule (21) sera remplacée par

$$(22) \qquad (n-h)\, a_h = \sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s A_{s-h}.$$

On tire successivement de la formule (20)

$$(23) \quad \begin{cases} a_1 = a_0 A_1, \\ 2\,a_2 = a_0 A_2 + a_1 A_1, \\ 3\,a_3 = a_0 A_3 + a_1 A_2 + a_2 A_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h\,a_h = a_0 A_h + a_1 A_{h-1} + a_2 A_{h-2} + \ldots + a_{h-1} A_1; \end{cases}$$

et de la formule (22)

$$(34) \quad \begin{cases} a_{n-1} = a_n A_{-1}, \\ 2\,a_{n-2} = a_{n-1} A_{-1} + a_n A_{-2}, \\ 3\,a_{n-3} = a_{n-2} A_{-1} + a_{n-1} A_{-2} + a_n A_{-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h\,a_{n-h} = a_{n-h+1} A_{-1} + a_{n-h+2} A_{-2} + a_{n-h+3} A_{-3} + \ldots + a_n A \end{cases}$$

En prenant la différence des formules (20) et (21), on obtiendra enc

$$(25) \qquad \sum_{s=0}^{s=n+1} a_s A_{h-s} = 0,$$

formule analogue à la formule (12).

Dans le formules (24), qui constituent le théorème de Girard *), le coefficient a_n reste indéterminé, de même que a_0 dans les formules (23). Mais si l'on fait $x=0$ dans les expressions F_x et $x^n F_{\frac{1}{x}}$, la comparaison des équations (2) et (3) donne

$$a_0 = (-1)^n r_1^{n_1} r_2^{n_2} \ldots r_m^{n_m}, \quad a_n = 1.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème IV. Soit

$$V_x = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}},$$

$n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, dont la somme soit égale à n, et $P_{x,k}$ désignant, pour tout nombre entier et positif k, une fonction rationelle et entière de x d'un degré inferieur à n_k.

Soit, pour abréger,

$$F_x = (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

et

$$f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ étant determinés par le système des formules (18), (26) et (23) ou (24), et les coefficients $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ par le système des formules (8) et (9) ou (14). On aura

$$V_x = \frac{f_x}{F_x}.$$

L'analyse précédente conduit encore à plusieurs conséquences, mais nous nous bornerons à signaler la suivante.

Concevons non seulement que la fonction f_x soit donnée, mais faisons actuellement

$$f_x = 1.$$

Alors on aura

$$b_0 = 1,$$
$$0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1},$$

*) Ce théorème, faussement attribué à Newton, appartient à Albert Girard, qui, 13 ans avant la naissance de Newton, en a donné l'énoncé dans un ouvrage dont voici le titre: Invention nouvelle en Algèbre, par Albert Girard, Mathématicien, à Amsterdam, chez G. Jansen Blaauw, 1629. — C'est M. J. de Gelder, prof. à Leyde, qui a fait cette remarque dans ses Wiskundige lessen, 2de Cursus, 2de uitgave, pag. 423.

et par suite les formules (14) donneront

$$0 = B_{-1} = B_{-2} = \ldots = B_{-(n-1)}.$$

Hâtons nous d'ajouter que pour ce cas l'équation (15) se réduit

$$B_{h-1} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}};$$

donc on aura le théorème suivant.

Théorème V. Soit F_x une fonction rationelle et entière de x du degré n, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

$n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x.

Soit h un nombre entier et positif, vérifiant la condition

$$h < n-1.$$

On aura

$$\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} = 0.$$

XXXVI.

Ein Theorem über Fakultäten.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

In dem 1sten Hefte des VIIten Theiles dieser Zeitschrift S. 204 habe ich einige Sätze angegeben, welche zur Auffindung der höheren Differentialquotienten sehr allgemeiner Funktionen dienen; so ist z. B.

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx_n} = \frac{1}{x^n}\left\{A_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + A_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + A_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots \right. \\ \left. \ldots + A_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\} \quad (1)$$

wobei die Coeffizienten durch die Formel

$$A_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\left\{ p_0 (p\lambda)_n - p_1 \overline{(p-1\lambda)}_n + p_2 \overline{(p-2\lambda)}_n - \ldots \right\} \quad (2)$$

bestimmt sind. Hiervon lässt sich eine sehr einfache Anwendung auf die Theorie der Fakultäten machen.

Sei nämlich $f(y) = y^{-\mu}$, so wird

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p \, \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p-1) y^{-\mu-p},$$

oder nach Vandermonde's Bezeichnung der Fakultäten

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p [\mu]^p y^{-\mu-p}, \text{ folgl. } f^{(p)}(x^\lambda) = (-1)^p [\mu]^p (x^{-\lambda(\mu+p)}. \quad (3)$$

Ferner ist

$$f(x^\lambda) = x^{-\lambda\mu} \text{ und } \frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = (-1)^n [\lambda\mu]^n x^{-\lambda\mu-n}.$$

Substituiren wir diess für die linke Seite von (1) und auf der rechten Seite die aus (3) für $p=1, 2, \ldots n$ sich ergebenden derivirten Funktionen, so wird, nach Hebung von $x^{-\lambda\mu-n}$,

$$(-1)^n [\lambda\mu]^n = -A_1 [\mu]^1 + A_2 [\mu]^2 - A_3 [\mu]^3 + \ldots + (-1)^n A_n [\mu]^n,$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$[\lambda\mu]^n = A_n [\mu]^n - A_{n-1} [\mu]^{n-1} + A_{n-2} [\mu]^{n-2} - \ldots \pm A_1 [\mu]^1. \quad (4)$$

Diese Gleichung lehrt die Fakultät der Wurzel $\lambda\mu$ durch die Fakultäten der Wurzel μ ausdrücken und dürfte in dieser Allgemeinheit einen nicht unwichtigen Beitrag zur Fakultätentheorie bilden.

In manchen speziellen Fällen kann man die endliche Reihe in (2), welche zur Bestimmung der Coeffizienten A dient, summiren; so findet man z. B.

1) für $\lambda=-1$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} \cdot (-1)^n (n-1)_q = (-1)^n (n-1)(n-2)\ldots(n-q) \cdot n_q,$$

folglich nach Nro. (4):

$$(\lambda)^n [-\mu]^n = [\mu]^n - (n-1) \cdot n_1 [\mu]^{n-1} + (n-1)(n-2) \cdot n_2 [\mu]^{n-2} - \ldots; \quad (5)$$

2) für $\lambda=2$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} (n-q)_q 2^{n-2q} = (q+1)(q+2)\ldots(2q) \cdot n_{2q} 2^{n-2q},$$

und daher nach Nro. (4):

$$\frac{1}{2^n} [2\mu]^n = [\mu]^n + \frac{2 \cdot n_2}{2^2} [\mu]^{n-1} + \frac{3.4 \cdot n_4}{2^4} [\mu]^{n-2} + \ldots, \quad (6)$$

3) für $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$A_{n-q} = \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q)},$$

und mithin

$$2^n [\tfrac{1}{2}\mu]^n = [\mu]^n + \frac{n(n-1)}{2} [\mu]^{n-1} + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{2.4} [\mu]^{n-2} + \ldots \quad (7)$$

Man kann diese Sätze auch in etwas anderer Form darstellen, wenn man mit Crelle folgendermassen bezeichnet:

$$\mu(\mu \pm \delta)(\mu \pm 2\delta)\ldots(\mu \pm \overline{n-1}\,\delta) = (\mu, \pm\delta)^n.$$

Es ergiebt sich dann leicht aus (5), (6) und (7):

$$\left.\begin{aligned}(\mu,-1)^n = (\mu,+1)^n - (n-1)\,.\,n_1\,(\mu,+1)^{n-1} \\ +(n-1)(n-2)\,.\,n_2\,(\mu,+1)^{n-2}-\ldots\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$(\mu,+\tfrac{1}{2})^n = (\mu,+1)^n - \frac{2\,.\,n_2}{2^2}(\mu,+1)^{n-1} + \frac{3\,.\,4\,.\,n_4}{2^4}(\mu,+1)^{n-2}-\ldots \quad (9$$

$$\left.\begin{aligned}(\mu,+2)^n = (\mu,+1)^n + \frac{n(n-1)}{2}(\mu,+1)^{n-1} \\ + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,4}(\mu,+1)^{n-2}+\ldots.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Der letzte Satz hängt sehr genau mit dem Theoreme über die Gamma-Funktionen zusammen, welches ich im 6ten Theile des Archivs. S. 218. Formel (10) bewiesen habe.

XXXVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Divisionsexempel.

Divisor: $1 \pm ax$,

Dividendus: $1 \mp x + (1-2a)\,x^2 \pm a\,(1-a+a^2)\,x^3$,

Quotient: $1 \mp (1+a)\,x + (1-a+a^2)\,x^2$.

Man soll untersuchen, ob die quadratische Gleichung

$$1 \mp (1+a)\,x + (1-a+a^2)\,x^2 = 0$$

reelle oder imaginäre Wurzeln hat, und zugleich die Grösse

$$1 \mp (1+a)\,x + (1-a+a^2)\,x^2$$

zwei reelle oder imaginäre Factoren des ersten Grades zerlegen.

Divisionsexempel.

Divisor: $1-(a+x)$,
Dividendus: $(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2-x^3$,
Quotient: $\{1+(a+x)\}^2$.

Man hat nämlich immer die Gleichung

$$(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2+x^3$$
$$=\{1+(a+x)\}\{1-(a+x)^2\}=\{1-(a+x)\}\{1+(a+x)\}^2.$$

XXXVIII.

Miscellen.

Die verschiedenen Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades.

Von dem Herrn Doctor Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

Die älteren Methoden der Auflösung biquadratischer Gleichungen von Descartes und Euler, so wie die neueste von Ampère (Archiv. Thl. I. S. 16.), stehen ziemlich unverbunden neben einander. Wie aber leicht zu sehen, ist Ampère's Auflösung nur eine Modification der Auflösung von Descartes, und die Vermeidung der Methode der unbestimmten Coefficienten ist nur scheinbar, da dieselbe der gewöhnlichen elementaren Herleitung des Zusammenhanges der Coefficienten der Gleichung und der Combinationen ihrer Wurzeln zum Grunde liegt.

Dagegen ist Euler's Auflösung die reine Umkehrung der Cartesischen; denn Euler geht von dem Punkte aus, zu welchem man durch eine vollständige Durchführung des Verfahrens von Descartes gelangt.

Um nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$1) \qquad x^4+px^2+qx+r=0$$

zu finden, setzt man nach Descartes

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2-2ax+b)(x^2+2ax+c),$$

sucht a, b, c durch p, q, r auszudrücken, und löst dann die Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} x^2-2ax+b=0, \\ x^2+2ax+c=0. \end{cases}$$

Die Coefficienten a, b, c erhält man durch Auflösung der chungen

$$b+c-4a^2=p,\ 2a(b-c)=q,\ bc=r,$$

denen sich die folgenden ergeben:

$$3)\quad b=\tfrac{1}{2}(p+4a^2+\frac{q}{2a}),\quad 4)\quad c=\tfrac{1}{2}(p+4a^2-\frac{q}{2a}),$$

$$5)\quad a^6+\frac{p}{2}a^4+(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4})a^2-\frac{q^2}{64}=0.$$

Bezeichnet man a^2 mit y, so hat man die kubische Hülfs- ichung

$$6)\quad y^3+\frac{p}{2}y^2+(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4})y-\frac{q^2}{64}=0.$$

h Auflösung derselben ist a bekannt, wie auch b und c, und erhält durch Auflösung der quadratischen Gleichungen (2)

$$7)\quad x=a\pm\sqrt{a^2-b},\ x=-a\pm\sqrt{a^2-c},$$

mit Benutzung von (3) und (4)

$$8)\quad \begin{cases} x=a\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p-a^2-\frac{q}{4a}}, \\ x=-a\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p-a^2+\frac{q}{4a}}; \end{cases}$$

ei es offenbar gleichgültig ist, ob man $a=+\sqrt{y_1}$ oder $a=-\sqrt{y_1}$ t, wenn y_1 eine beliebige von den drei Wurzeln der kubi- n Hülfsgleichung bezeichnet. Die Formen der Wurzeln (8) men eine einfachere Gestalt an, wenn man statt der Coefficienten nd q der ursprünglichen Gleichung die sämmtlichen drei rzeln der kubischen Hülfsgleichung aufnimmt. Es n diese nämlich y_1, y_2, y_3; dann ist

$$9)\quad -\frac{p}{2}=y_1+y_2+y_3;\ \frac{q^2}{64}=y_1y_2y_3.$$

nn also q eine positive Zahl ist, dann ist

$$10)\quad \frac{q}{8}=\sqrt{y_1}.\sqrt{y_2}.\sqrt{y_3};$$

wenn q eine negative Zahl ist, so hat man

$$11)\quad \frac{q}{8}=-\sqrt{y_1}.\sqrt{y_2}.\sqrt{y_3},$$

$$-\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 y_0$$

$$+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(2y_0+y_n)$$

$$=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta);$$

und folglich, weil offenbar

$$\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)=0,\ \operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta)=0$$

ist:

$$M=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n);$$

also nach dem Archiv. Thl. II. S. 275. bewiesenen allgemeinen Satze von den bestimmten Integralen offenbar:

$$M=\int_a^b xydx.$$

Ferner ist

$$N=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$$

$$=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta),$$

und folglich, weil offenbar

$$\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta)=0$$

ist:

$$N=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n);$$

also nach dem in Rede stehenden Satze von den bestimmten Integralen:

$$N = \int_a^b y dx.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$X = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}.$$

Setzen wir ferner

$$M' = \text{Lim.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_0^2 + y_0 y_1 + y_1^2}{3(y_0 + y_1)} \cdot \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \frac{b-a}{n} \\ + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3(y_1 + y_2)} \cdot \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \frac{b-a}{n} \\ + \frac{y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2}{3(y_2 + y_3)} \cdot \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \frac{b-a}{n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-1} y_n + y_n^2}{3(y_{n-1} + y_n)} \cdot \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) \frac{b-a}{n} \end{array} \right\},$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$Y = \frac{M'}{N},$$

wo es nun auf die Bestimmung der Grösse M' ankommt.

Es ist aber

$$M' = \text{Lim.} \frac{b-a}{6n} \left\{ \begin{array}{l} y_0^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \ldots + 2y_{n-1}^2 + y_n^2 \\ + y_0 y_1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_4 + \ldots + y_{n-1} y_n \end{array} \right\},$$

und folglich, weil

$$\begin{array}{l} y_0 y_1 = y_0 (y_1 - y_0) + y_0^2, \\ y_1 y_2 = y_1 (y_2 - y_1) + y_1^2, \\ y_2 y_3 = y_2 (y_3 - y_2) + y_2^2, \\ y_3 y_4 = y_3 (y_4 - y_3) + y_3^2, \\ \text{u. s. w.} \\ y_{n-1} y_n = y_{n-1} (y_n - y_{n-1}) + y_{n-1}^2 \end{array}$$

ist:

$$M' =$$

$$\text{Lim.} \frac{b-a}{6n} \left\{ \begin{array}{l} 2y_0^2 + 3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 + \ldots + 3y_{n-1}^2 + y_n^2 \\ + y_0(y_1 - y_0) + y_1(y_2 - y_1) + y_2(y_3 - y_2) + \ldots + y_{n-1}(y_n - y_{n-1}) \end{array} \right\}$$

I. Cylindrische und Konische Loxodrome.

Der Rotationscylinder und der Rotationskegel sind dargeste bezüglich durch folgende Gleichungen:

$$x^2+y^2=a^2\ldots(2);\quad x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2\ldots(3);$$

in welchen a für beide Körper den Radius der Grundfläche, u c für den Kegel die Coordinate des Scheitels bezeichnet. D Gleichung des Kegels geht aber in die des Cylinders über, wen man in derselben $c=\infty$ setzt. Daher wird es nicht nöthig sei die Loxodromen beider Körper unmittelbar zu suchen, sondern genügt, bloss die konische Loxodrome unmittelbar zu entwickel um sodann aus dieser die cylindrische Loxodrome abzuleiten. Inde wir so verfahren, schlagen wir nur den sachgemässen Weg ein.

Nehmen wir daher obige Gleichung des Kegels:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2\ldots\ldots(3)$$

und differentiiren dieselbe, so erhalten wir:

$$x\,dx+y\,dy=-\frac{a^2}{c^2}(c-z)\,dz\ldots\ldots(4)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c^2x}{a^2(c-z)},\text{ und }\frac{dz}{dy}=-\frac{c^2y}{a^2(c-z)}.$$

Substituirt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung (1), s verwandelt sich dieselbe nach einigen Reductionen in folgende:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\tang\gamma\cdot(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}y}{y+\tang\gamma\cdot(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}x},$$

welche Gleichung wir unter nachstehende Form bringen:

$$y\,dx-x\,dy=-\tang\gamma\cdot(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}(x\,dx+y\,dy).$$

Aus dieser erhält man nun, wenn man rechts den Werth in z au Gleichung (4) substituirt und zum Zwecke der Integration durch $x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2$ auf den verschiedenen Seiten dividirt, folgend Integralgleichung:

$$\int\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\tang\gamma\cdot(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{c-z}.$$

$$\text{Lim}\,\mu\,.\,\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n)=0.$$

Und weil nun offenbar auch

$$\text{Lim}\,.\,\mu\beta\,\frac{b-a}{n}=0$$

ist, so ist

$$\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\{y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+..+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}=0.$$

Nimmt man hierzu endlich noch, dass offenbar

$$\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(\alpha^2+2\beta^2)=0$$

ist, so folgt aus dem Obigen

$$M'=\tfrac{\pi}{3}\int_a^b y^2dx,$$

also

$$Y=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}\,.$$

Durch die Formeln

$$X=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\quad Y=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

ist nun die Lage des Schwerpunkts vollkommen bestimmt.

Hätte man die Coordinaten X, Y des Schwerpunkts eines Flächenstücks wie $ACEDB$ in Taf. VI. Fig. 3. zu bestimmen, so wäre, wenn wir die Abscissen der Punkte A, B und E respective durch a, b und e bezeichnen, nach der Lehre vom Schwerpunkte und nach dem Vorhergehenden:

$$X=\frac{\frac{\int_a^e xydx}{\int_a^e ydx}\,.\int_a^e ydx+\frac{\int_e^b xydx}{\int_e^b ydx}\,.\int_e^b ydx}{\int_a^e ydx+\int_e^b ydx},$$

$$Y=\frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^e y^2dx}{\int_a^e ydx}\,.\int_a^e ydx+\frac{1}{2}\,.\,\frac{\int_e^b y^2dx}{\int_e^b ydx}\,.\int_e^b ydx}{\int_a^e ydx+\int_e^b ydx};$$

für die Gleichung der Wendelfläche des Cylinders, wodurc
Verbindung mit (2) die cylindrische Loxodrome bestimmt ist;

$$\left.\begin{aligned} \text{Arc sin}\frac{x}{v} &= \text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a}\,,\\ \text{Arc cos}\frac{y}{v} &= \text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (8)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Eb
XZ und YZ, welche gemeinschaftlich ebenfalls die Cylinderl
drome bestimmen.

Diese Gleichungen in anderer Form lauten:

$$x = y\ \text{tang}\,(\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a})\,,$$

$$x = v\,\text{sin}\,(\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a})\,,$$

$$y = v\,\text{cos}\,(\text{tang}\,\gamma\,.\,\frac{z}{a})\,.$$

II. Sphärische und Sphäroidische Loxodrom

Bekanntlich sind die Gleichungen der Kugel und des Sphär
beziehungsweise folgende:

$$x^2+y^2=a^2-z^2\ldots\ (9)\,; \qquad x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)\ \ldots\ldots$$

von welchen die zweite in die erstere übergeht, wenn man in
selben $b=a$ setzt. Wir können also auch hier dasselbe Verfah
wie vorhin, anwenden, der Art nämlich, dass wir zunächst
Gleichung der Sphäroidischen Loxodrome unmittelbar entwick
und aus dieser sodann die Gleichung der Sphärischen Loxodr
einfach dadurch ableiten, dass wir bloss a statt b setzen.

Aus der gegebenen Gleichung des Sphäroids

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)\ \ldots\ldots\ (10)$$

erhält man nun durch Differentiation:

$$x\,dx+y\,dy=-\frac{a^2}{b^2}z\,dz\ \ldots\ldots\ (11)$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\,,\ \text{und}\ \frac{dz}{dy}=-\frac{b^2y}{a^2z}\,.$$

Werden diese Werthe wieder in die allgemeine Gleichung (1) substituirt, so erhält man für dieselbe nach einigen Vereinfachungen die nachstehende:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\tang\gamma\,.\,(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2})^{\frac{1}{2}}\,y}{y+\tang\gamma\,.\,(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2})^{\frac{1}{2}}\,x},$$

welche wir folgendermassen umformen:

$$y\,dx-x\,dy=-\tang\gamma\,.\,(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2})^{\frac{1}{2}}\,(x\,dx+y\,dy).$$

Setzen wir nun rechts aus Gleichung (11) den Werth in z, und dividiren Behufs der Integration auf beiden Seiten einzeln durch $x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)$, so erhalten wir die Integralgleichung:

$$\int\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\tang\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)\,z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a\,(b^2-z^2)},$$

und hieraus in x und z, so wie in y und z die Gleichungen:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-y^2}}=\tang\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)\,z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a\,(b^2-z^2)},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\tang\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)\,z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a\,(b^2-z^2)}.$$

Die Ausführung der angedeuteten Integration gibt, da Const. = 0 ist:

$$\text{Arc tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\tang\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\}\quad..(12)$$

für die Gleichung der Wendelfläche des Sphäroids, welche mit (10) verbunden die Sphäroidische Loxodrome bestimmt; und

$$\left.\begin{array}{l}\text{Arc sin}\frac{x}{v}=\frac{1}{2}\tang\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\},\\ \text{Arc cos}\frac{x}{v}=\frac{1}{2}\tang\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\quad(13)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen und YZ, durch welche die Sphäroidische Loxodrome ebenfalls ommen bestimmt ist.

Vorstehende Gleichungen stellen in anderer Form, wenn ma zugleich den Ausdruck innerhalb der Klammer mit S bezeichnet sich also dar:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, S\right),$$
$$x = v \sin\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, S\right),$$
$$y = v \cos\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, S\right).$$

Die Gleichungen der Sphärischen Loxodrome ergeben sich nu ganz einfach aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man in den selben $b = a$ setzt. Alsdann findet man aus (12):

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14$$

für die Gleichung der Wendelfläche der Kugel, welche in Verbin dung mit (9) die Sphärische Loxodrome bestimmt; und aus (13)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}, \\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{y}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche ebenfalls zur vollständigen Bestimmung der Sphärischen Loxodrome dienen.

Diese Gleichungen in anderer Form sind:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}\right),$$
$$x = v \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}\right),$$
$$y = v \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}\right).$$

III. Hyperboloidische Loxodrome erster Art.

Die Gleichung des einmanteligen Rotationshyperboloids (à un nappe) ist bekanntlich:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + z^2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16$$

Dieselbe geht nun aber aus der des Rotationsellipsoids hervo wenn man in dieser $b = b\sqrt{-1}$ setzt. Daher geben auch die vorhi entwickelten Resultate auf der Stelle die gesuchten Gleichunge

de ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades lt, nach dem Obigen folglich offenbar allgemein gültig ist.

Wir haben daher jetzt den folgenden Satz:

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist, so ist für edes a immer

$$f(x) = (x-a) f_1(x) + f(a),$$

wo $f_1(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades bezeichnet, deren höchstes Glied denselben Coefficienten wie das höchste Glied der Function $f(x)$ hat *).

§. 2.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ eine beliebige ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades sei, deren höchstes Glied den Coefficienten A hat, und dass

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

n ganz beliebige Grössen seien. Dann ist nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-a_1) f_1(x) + f(a_1), \\
f_1(x) &= (x-a_2) f_2(x) + f_1(a_2), \\
f_2(x) &= (x-a_3) f_3(x) + f_2(a_3), \\
f_3(x) &= (x-a_4) f_4(x) + f_3(a_4), \\
&\text{u. s. w.} \\
f_{n-1}(x) &= (x-a_n) f_n(x) + f_{n-1}(a_n);
\end{aligned}$$

wo nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \ldots f_n(x)$$

ganze rationale algebraische Functionen respective vom Grade

$$n-1, n-2, n-3, n-4, \ldots 0$$

sind, deren höchste Glieder sämmtlich den Coefficienten A haben, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die constante Grösse $f_n(x)$ $=A$ sein muss.

Durch successive Anwendung der obigen Gleichungen erhalten wir aber leicht für $f(x)$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
f(x) = \; & f(a_1) \\
& + (x-a_1) f_1(a_2)
\end{aligned}$$

*) Eine andere Darstellung des Beweises dieses Satzes s. m. Archiv. Thl. II. S. 354.

$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$
u. s. w.
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-}$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

von welchem sich nun die folgenden Anwendungen machen las

§. 3.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die n Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind.

Ist dann $f(a_1)=0$, so ist nach dem vorhergehenden Paragra

$$f(x) = (x-a_1)f_1(a_2)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$
u. s. w.
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_2)=(a_2-a_1)f_1(a_2),$$

und folglich, wenn $f(a_2)=0$ ist, weil die Grössen a_1 und a_2 gleich sind, also nicht $a_2-a_1=0$ ist, jederzeit $f_1(a_2)=0$.

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$f(x)= (x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$
u. s. w.
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_3)=(a_3-a_1)(a_3-a_2)f_2(a_3),$$

und folglich, wenn $f(a_3)=0$ ist, weil die Grössen a_1, a_2, a_3 un einander ungleich sind, also nicht

$$\text{Arc tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\tan g\gamma\left[\log\frac{A((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}\right]\ldots\ldots(22)$$

die Gleichung der Wendelfläche des zweimanteligen Rotationshyperboloids, welche mit (21) verbunden zur Bestimmung der Hyperboloidischen Loxodrome der zweiten Art dient; und:

$$\left.\begin{aligned}\text{Arc sin}\frac{x}{v}&=\frac{1}{2}\tan g\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right],\\ \text{Arc cos}\frac{y}{v}&=\frac{1}{2}\tan g\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right],\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(23)$$

Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen
Z und YZ, durch welche gemeinschaftlich ebenfalls die Hyper-
oidische Loxodrome der zweiten Art bestimmt wird.

In anderer Form, und den Ausdruck innerhalb der Klamm
mit H_2 bezeichnend, erhält man:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma \,.\, H_2\right),$$

$$x = v \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma \,.\, H_2\right),$$

$$y = v \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma \,.\, H_2\right).$$

Für den Fall, dass das zweimantelige Rotationshyperbol
durch die gleichseitige Hyperbel erzeugt ist, verwandeln sich
stehende Gleichungen, indem man $b = a$ setzt, in folgende:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \begin{array}{c} \log \dfrac{A'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-z} \\ -\sqrt{2}.\log \dfrac{B'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}.z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}.z} \end{array} \right\} \ldots\ldots (1$$

die Gleichung der Wendelfläche des gleichseitigen zweimanteli
Rotationshyperboloids; und:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Arc\,sin}\dfrac{x}{v} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \begin{array}{c} \log \dfrac{A'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-z} \\ -\sqrt{2}.\log \dfrac{B'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}.z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}.z} \end{array} \right\}, \\ \operatorname{Arc\,cos}\dfrac{y}{v} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \begin{array}{c} \log \dfrac{A'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-z} \\ -\sqrt{2}.\log \dfrac{B'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}.z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}.z} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \ldots\ldots (2$$

die Gleichungen der Projectionen der gleichseitig-hyperboloi
schen Loxodrome zweiter Art auf den Coordinaten-Ebenen
und YZ.

Den Ausdruck in der Klammer mit G_2 bezeichnend, hat n
für diese Gleichungen in anderer Form die folgenden:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma \,.\, G_2\right),$$

$$x = v \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma \,.\, G_2\right),$$

$$y = v \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang}\gamma \,.\, G_2\right).$$

V. Paraboloidische Loxodrome.

Als Gleichung des Rotationsparaboloids hat man bekanntlich:

$$x^2+y^2=pz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ch Differentiation ergibt sich hieraus:

$$xdx+ydy=\frac{1}{2}pdz. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

er erhält man:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{p}, \text{ und } \frac{dz}{dy}=\frac{2y}{p}.$$

stituirt man diese Werthe wieder in die allgemeine Gleichung so findet man nach einigen Reductionen:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\tang\gamma.(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}y}{y+\tang\gamma.(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}x}.$$

gt man diese Gleichung in nachstehende Form:

$$ydx-xdy=-\tang\gamma(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}(xdx+ydy),$$

stituirt alsdann auf der rechten Seite aus (27) den Werth in nd dividirt zum Zwecke der Integration auf beiden Seiten beich durch $x^2+y^2=pz$, so erhält man die Integralgleichung:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\tang\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}},$$

für die Gleichungen in x und z, so wie in y und z:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=\frac{1}{2}\tang\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\frac{1}{2}\tang\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}.$$

n gibt die Integration, wenn man die nach dem Anfange der ve zu bestimmende Constans $=\frac{1}{2}\tang\gamma.(\log A-\frac{B}{p})$ setzt:

$$\text{Arc tang}\frac{x}{y}$$

$$=\frac{1}{2}\tang\gamma.\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right]. \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

für die Gleichung der Wendelfläche des Rotationsparaboloi
welche mit (26) verbunden die Paraboloidische Loxodrome
stimmt; und:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Arc}\sin\frac{x}{v} \\ &=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\cdot\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2(p+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right], \\ &\operatorname{Arc}\cos\frac{y}{v} \\ &=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\cdot\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2(p+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right] \end{aligned}\right\}\ldots(\ldots$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Eben
XZ und YZ, durch welche die Paraboloidische Loxodrome eb
falls vollständig bestimmt ist.

Diese Gleichungen sind in anderer Form, indem man zuglei
den Ausdruck der Klammer mit P bezeichnet, folgende:

$$x=y\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,P\right),$$

$$x=v\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,P\right),$$

$$y=v\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,P\right).$$

LX.

Ueber Legendre's Theorem von de Euler'schen Integralen zweiter Art

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Der sinnreiche Gedanke, den Satz Legendre's über die Gamm
functionen mittelst eines bestimmten Integrales für $\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}$ ab

leiten, was offenbar der direkteste Weg ist, rührt bekanntlich von Lejeune Dirichlet her. Er benutzt hierzu die Gleichung *):

$$\frac{d l\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)^\mu} \quad (1)$$

ganz unmittelbar, was aber etwas unbequem ist. Vielleicht dürfte folgender Weg einfacher und leichter sein.

Nach Nro. (1) ist identisch

$$\frac{d l\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)} + \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^\mu}\right\} \frac{dx}{x}$$

indem sich das zweite Integral gegen das erste aus der Parenthese entspringende hebt. Hierbei sind nun die beiden ersten Integrale von μ unabhängig und bilden eine rein numerische Constante. Den Werth derselben kann man entdecken, wenn man die Integrale als die Gränzen betrachtet, denen sich die Ausdrücke

$$\int_0^n \frac{dx}{x} e^{-x} \text{ und } \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}$$

für unendliche wachsende n nähern. Es ist nämlich:

$$\int_0^n \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}$$

$$= \int_0^n \frac{dx}{x} \left\{1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right\} - \int_0^n \frac{dx}{x} + \int_0^n \frac{dx}{1+x}.$$

Hier hebt sich beiderseits das Integral $\int_0^n \frac{dx}{x}$, und es bleibt nach geschehener Integration:

$$\int_0^n \frac{dx}{x} e^{-x} + \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}$$

$$= -\frac{1}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{n^3}{1.2.3} + \ldots + l(n+1),$$

wofür man auch durch Zusetzung der Grösse $ln - ln$ schreiben kann:

$$\int_0^n \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}$$

$$= ln - \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{n^3}{1.2.3} + \ldots + l(1+\frac{1}{n}).$$

Bekanntlich hat man aber folgende unter allen Umständen convergirende Reihe für den Integrallogarithmus:

*) M. s. den zweiten Band des Archivs Nro. XXV. §. 19. Formel (7).

$$li\,u = C + \frac{1}{2}\,l[(lu)^2] + \frac{1}{1}\cdot\frac{lu}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lu)^2}{1.2} + \ldots\ldots,$$

worin $C = 0{,}5772156$ ist. Setzt man hierin $u = e^{-n}$, so ergibt s

$$ln - \frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{1.2.3} + \ldots = -C + li(e^{-n}),$$

und folglich, wenn man dieses Resultat in die vorige Betrachtu einführt,

$$\int_0^n \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)} = -C + li(e^{-n}) + l(1+\frac{1}{n}).$$

Gehen wir in dieser für jedes n geltenden Gleichung zur Grän für unendlich wachsende n über, so wird

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = -C + li(0).$$

Da aber nach der Definition des Integrallogarithmus

$$li\,u = \int_0^u \frac{dx}{lx}$$

ist, so folgt für $u = 0$, $li(0) = 0$, mithin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = -C = -(0{,}5772156).$$

Durch Benutzung dieses Resultats geht die Gleichung (2) in d folgende über:

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^\mu}\right\}\frac{dx}{x}.$$

Dieselbe gestaltet sich noch etwas eleganter, wenn man $\frac{1}{1+x} =$ setzt, woraus $x = \frac{1-z}{z}$ und $dx = -\frac{dz}{z^2}$ folgt; ist ferner $x = \infty$ u $x = 0$ geworden, so hat z die Werthe $z = 0$ und $z = 1$ angenomme und daher ist auch

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C - \int_1^0 \left\{z - z^\mu\right\}\frac{dz}{z^2 \cdot \frac{1-z}{z}},$$

oder wenn man die Gränzen vertauscht und wieder x für z schreib

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx.$$

iese Gleichung, welche man auch auf andere Weise abgeleitet it, ist es, die man zu einem sehr einfachen Beweise des Lendre'schen Theoremes benutzen kann.

Setzt man in derselben $\mu+\frac{h}{n}$ für μ, wobei h und n ganze ositive Zahlen bedeuten mögen, so wird

$$\frac{d l\Gamma(\mu+\frac{h}{n})}{d\mu} = -C+\int_0^1 \frac{1-x^{\mu+\frac{h}{n}-1}}{1-x}\,dx,$$

der für $x=z^n$:

$$\frac{d l\Gamma(\mu+\frac{h}{n})}{d\mu} = -C+n\int_0^1 \frac{z^{n-1}-z^{n\mu+h-1}}{1-z^n}\,dz.$$

Denkt man sich in dieser Gleichung für h der Reihe nach), 1, 2, 3, ... $n-1$ geschrieben und alle so entstehenden Gleichungen addirt, so erscheint die Gleichung:

$$\frac{d l\Gamma(\mu)}{d\mu}+\frac{d l\Gamma(\mu+\frac{1}{n})}{d\mu}+\ldots+\frac{d l\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{d\mu}$$
$$=-nC+n\int_0^1 \frac{nz^{n-1}-z^{n\mu-1}(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1})}{1-z^n}\,dz,$$

oder weil

$$1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$$

ist:

$$\frac{d l\{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})\}}{d\mu}$$
$$=-nC+n\int_0^1 \left\{\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{z^{n\mu-1}}{1-z}\right\}dz.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (3) z und $n\mu$ für x und μ, so tritt $n\,d\mu$ an die Stelle von $d\mu$, und nach beiderseitiger Multiplikation mit n ist dann

$$\frac{d l\Gamma(n\mu)}{d\mu}=-nC+n\int_0^1 \frac{1-z^{n\mu-1}}{1-z}\,dz.$$

h Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen ergibt sich

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

$$= x^n - \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \cdot x^{n-1}$$

$$+ \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \cdot x^{n-2}$$

$$- \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \cdot x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \cdot x$$

$$+ (-1)^n \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n}$$

und folglich nach dem Obigen für jedes x:

$$Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$\equiv Ax^n - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \cdot x^{n-1}$$

$$+ A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \cdot x^{n-2}$$

$$- A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \cdot x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{n-1} \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \cdot x$$

$$+ (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n} \quad (\text{Mod. } p).$$

Also ist, wenn wir der Kürze wegen

$$q = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}.$$

So wird denn

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n}) = n^{\frac{1}{2}-n\mu}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(n\mu),$$

und diess ist der von Legendre zuerst bewiesene Satz.

XLI.

Ueber die Verwandlung der Funktionen einer Veränderlichen in Reihen, welche nach steigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Unter die schönsten Arbeiten Cauchy's gehört gewiss die Auffindung des Kennzeichens, wonach man jeder Funktion auf den ersten Blick ansehen kann, unter welchen Bedingungen sich dieselbe in eine convergente nach steigenden Potenzen ihrer Veränderlichen fortschreitende Reihe verwandeln lässt. Dasselbe spricht sich in folgendem Satze aus:

„Sei $F(x)$ die gegebene Funktion und um völliger Allgemeinheit willen $x = r(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)$, in welcher Form alle denkbaren reellen und imaginären Werthe von x enthalten sind. Bleiben n die Funktion $F(x)$ und ihr erster Differenzialquotient $F'(x)$ lich und stetig für alle Werthe von x, deren Moduli innerhalb Intervalles 0 bis R liegen, wo R eine durch die Natur der ktion $F(x)$ selbst bestimmte Grösse ist, so kann man $F(x)$

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

und folglich nach der Lehre von den Congruenzen für jedes x a

$$\left\{ A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \right\} x^{n-1} \equiv \text{ (Mod. } p).$$

Aus dieser Congruenz und der Congruenz

$$f_1(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

folgt nach der Lehre von den Congruenzen, wenn wir der Kü wegen

$$f_2(x) = \left\{ A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \right\} x^{n-2}$$

$$+ \left\{ A_3 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \right\} x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ \left\{ A_{n-1} - (-1)^{n-1} A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \right\} x$$

$$+ A_n - (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n}$$

setzen, für jedes x:

$$f_2(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p);$$

also:

$$f_2(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_2(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_2(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_2(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

u. s. w.)

$$f_2(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p);$$

welches aus ganz ähnlichen Gründen wie vorher nach §. 6. wi nicht möglich ist, wenn nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2}$$

durch die Primzahl p theilbar, oder nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

Nach dem Maclaurin'schen Theoreme hat man nämlich:

$$F(r) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} r + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 + \ldots , \qquad (2)$$

as aber nur so lange richtig bleibt, als die Reihe rechts conver-rt, weil ausserdem die Funktion und die Reihe einander nicht leich sind. Unter dieser Voraussetzung ist es auch erlaubt, $^{ti} = r(\cos t + i \sin t)$ für r zu setzen, indem sich dann die Reihe zwei andere zerlegt, nämlich

$$F(0) + \frac{F'(0)}{1} r\cos t + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 \cos 2t + \ldots$$

$$+ \; i\left\{\frac{F'(0)}{1} r \sin t + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 \sin 2t + \ldots\right\},$$

elche ebenfalls noch convergiren, wenn die Reihe (2) convergirt.

Multipliziren wir jetzt die Gleichung

$$F(re^{ti}) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} re^{ti} + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 e^{2ti} + \ldots\ldots$$

mit $e^{-nti}\,dt$ und integriren nach t zwischen den Gränzen $t=0$, $=2\pi$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} e^{-nti} F(re^{ti})\,dt = \\ &F(0)\int_0^{2\pi} e^{-nti}\,dt + \frac{r F'(0)}{1}\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ti}\,dt \\ &\qquad + \frac{r^2 F''(0)}{1.2}\int_0^{2\pi} e^{-(n-2)ti}\,dt + \ldots \end{aligned}\right\} . \qquad (3)$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe wäre etwa

$$\frac{r^m F^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\int_0^{2\pi} e^{-(n-m)ti}\,dt , \qquad (4)$$

wobei m eine positive ganze Zahl bedeutet und es sich noch um den Werth des bestimmten Integrales handelt. Dasselbe ist auch

$$= \int_0^{2\pi} \cos(n-m)\,t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)\,t\,dt .$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: ob nämlich die willkürliche Zahl m von der gegebenen n verschieden ist, oder nicht.

Im ersten Falle hat man

$$\int \cos(n-m)\,t\,dt - i\int \sin(n-m)\,t\,dt = \frac{\sin(n-m)\,t}{n-m} + i\,\frac{\cos(n-m)\,t}{n-m} ;$$

lich, weil auch $n-m$ eine ganze Zahl ist:

$$\int_0^{2\pi} \cos(n-m)t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)t\,dt = 0.$$

Für $m=n$ dagegen ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(n-m)t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)t\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Es verschwinden also in der Reihe (3) alle diejenigen Glie in denen die fortlaufenden Zahlen $m=1, 2, 3, \ldots$ von n versch den sind, und es bleibt demnach bloss das Glied übrig, in welch $m=n$ ist, d. h. gemäss des Ausdruckes (4) die Grösse

$$\frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}\,2\pi;$$

folglich haben wir nach (3)

$$\int_0^{2\pi} e^{-nti} F(re^{ti})\,dt = \frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}\,2\pi,$$

womit das aufgestellte Lemma bewiesen ist.

II.

Wir können hieraus leicht unser im Anfang aufgestell Theorem beweisen. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti}-a} F(re^{ti})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-ti}} F(re^{ti})\,dt.$$

Dabei lässt sich der unter dem Integralzeichen stehende Bruch

$$\frac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-ti}}$$

nach der bekannten Formel

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\ldots, 1>u>-1$$

in eine unendliche Reihe verwandeln, sobald $\frac{a}{r}$ wie u unter d Einheit liegt, also hinsichtlich der absoluten Werthe $a<r$ is Dann wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti}-a} F(re^{ti})\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} F(re^{ti})\,dt + \frac{a}{r}\int_0^{2\pi} e^{-ti} F(re^{ti})\,dt + \frac{a^2}{r^2}\int_0^{2\pi} e^{-2ti} F(re^{ti})\,dt + \ldots\right\}.$$

Bestimmt man hier die Werthe sämmtlicher Integrale rechts mit Hülfe von Formel (1), so ergiebt sich für $a<r$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti})\,dt=F(0)+\frac{a}{1}F'(0)+\frac{a^2}{1.2}F''(0)+\ldots. \quad (5)$$

Nun war aber früher vorausgesetzt, dass die Reihe

$$F(0)+\frac{r}{1}F'(0)+\frac{r^2}{1.2}F''(0)+\ldots.$$

convergire und $F(r)$ zur Summe habe; da nun $a<r$ ist, so muss die Reihe in (5) um so mehr convergiren und $F(a)$ zur Summe haben; daher ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti})\,dt=F(a),\ a<r; \quad (6)$$

und diess gilt für alle solche Werthe von r, für welche sich $F(r)$ in eine nach steigenden Potenzen fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln lässt.

Es liegt nun der Gedanke sehr nahe, diese ganze Betrachtungsweise umzukehren. Könnte man nämlich unabhängig vom Maclaurin'schen Satze die Richtigkeit des in Nro. (6) aufgestellten Theoremes erweisen und die Bedingungen ermitteln, unter welchen dasselbe gilt, so wären hiermit auch die Bedingungen gefunden, unter welchen man eine Funktion $F(a)$ in eine nach Potenzen von a fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln kann. Nun hat man aber den Satz

$$\int_0^c f(t)\,dt=\mathrm{Lim}\frac{c}{n}\left\{f(0)+f(\tfrac{c}{n})+f(\tfrac{2c}{n})+\ldots+f(\tfrac{\overline{n-1}\,c}{n})\right\},$$

wobei sich das Zeichen Lim auf das unbegränzte Wachsen von dem ganzen positiven n bezieht. Hiernach ist für

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti}):$$

$$F(a)=\mathrm{Lim}\,\frac{1}{n}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{r}{r-a}F(c)+\dfrac{re^{\frac{2\pi}{n}i}}{re^{\frac{2\pi}{n}i}-a}F(re^{\frac{2\pi}{n}i})\\ \qquad+\dfrac{re^{\frac{4\pi}{n}i}}{re^{\frac{4\pi}{n}i}-a}F(re^{\frac{4\pi}{n}i})+\ldots\end{array}\right\};$$

oder für $e^{\frac{2\pi}{n}i}=\Theta$:

$$F(a)=\mathrm{Lim}\,\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-a}F(0)+\frac{\Theta r}{\Theta r-a}F(\Theta r)+\frac{\Theta^2 r}{\Theta^2 r-a}F(\Theta^2 r)+\ldots\right\}.$$

Dieser Satz wäre es also eigentlich, den man beweisen müss
woraus dann Nro. (6) und das Maclaurin'sche Theorem unmittel
folgen würden. Diesen Weg hat sich in der That Cauchy
brochen, wobei er auch die Bedeutung der vorigen Gleichung
die Integralrechnung ganz verschweigen konnte, wenn er se
Untersuchungen als zur Differenzialrechnung gehörig darstel
wollte.

XLII.

Ueber eine Anwendung des in der A
handlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. b
wiesenen Hauptsatzes der Theorie d
bestimmten Integrale.

Von

dem Herausgeber.

Der in der Abhandlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. bewies
bekannte Hauptsatz der Theorie der bestimmten Integrale sch
mir nicht immer in seiner ganzen Wichtigkeit erkannt, wohl sel
zuweilen für einen gewissermaassen bloss näherungsweise richti
Satz gehalten zu werden, was eine völlig unrichtige Ansicht
Namentlich scheint es mir, dass dieser Satz in den Lehrbüch
der höheren Analysis noch nicht allgemein genug zur Entwickel
der Grundformeln, auf denen die Anwendungen der Integralre
nung auf Geometrie und Mechanik beruhen, benutzt wird, da d
nach meiner Ueberzeugung gerade der in Rede stehende Satz
eigentlichen und wahren Grund aller dieser Anwendungen enth
Ich habe mir daher vorgenommen, in verschiedenen nach und n
auf einander folgenden kleinen Aufsätzen die Anwendung die
wichtigen Satzes etwas näher zu erläutern, und werde zunäc
auf den folgenden Seiten eine Entwickelung der bekannten Forn
zur Bestimmung des Schwerpunktes ebener Curvenstücke mitthei
welcher man, wie ich hoffe, wenn dieselbe auch weitläufiger
die gewöhnliche Darstellung ist, doch völlige Strenge
Evidenz nicht wird absprechen können.

Zuerst müssen wir die folgende Aufgabe auflösen.

Den Schwerpunkt eines Trapeziums $ABCD$ (Taf. VI. Fig. 1.), dessen parallele Seiten AC und BD sind, zu finden.

Um diese Aufgabe aufzulösen, halbire man die parallelen Seiten AC und BD des Trapeziums in E und F, und ziehe EF, so ist diese Linie nach bekannten allgemeinen Sätzen vom Schwerpunkte ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums. Zieht man ferner die Linien DE und AF, und nimmt $EG=\frac{1}{3}DE$ und $FH=\frac{1}{3}AF$, so sind G und H die Schwerpunkte der Dreiecke ACD und ABD, und es ist also auch die Linie GH ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums. Folglich ist der Durchschnittspunkt S der Linien EF und GH der gesuchte Schwerpunkt des Trapeziums.

Legen wir nun durch A eine auf den parallelen Seiten des Trapeziums senkrecht stehende, durch S eine denselben Seiten parallele gerade Linie, und bezeichnen den Durchschnittspunkt dieser beiden Linien durch K, die Entfernung der beiden parallelen Seiten des Trapeziums von einander oder die sogenannte Höhe desselben aber durch AL, so ist nach bekannten allgemeinen Sätzen vom Schwerpunkte

$$AK=\frac{\frac{1}{3}AL.\Delta ACD+\frac{2}{3}AL.\Delta ABD}{\Delta ACD+\Delta ABD}$$

oder

$$AK=\frac{1+2\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}}{3\left(1+\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}\right)}.AL;$$

also, wie sogleich erhellet:

$$AK=\frac{1+2\frac{BD}{AC}}{3\left(1+\frac{BD}{AC}\right)}.AL=\frac{AC+2BD}{3(AC+BD)}.AL.$$

Weil aber offenbar

$$\frac{AK}{AL}=\frac{AJ}{AB}$$

ist, so ist auch

$$AJ=\frac{AC+2BD}{3(AC+BD)}.AB.$$

Ferner ist offenbar

$$AB:BF-AE=AJ:SJ-AE,$$

Aber

$$\underset{(1,\,2,\,3,\,\ldots,\,p-1)}{R_{p-1}} = 1.2.3.4\ldots(p-1),$$

und folglich

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1).(-1)^{p-1} \equiv 0 \ (\text{Mod. } p).$$

Ist nun die Primzahl p grösser als 2, so ist $p-1$ eine gera Zahl, also

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p),$$

wobei aber sogleich in die Augen fällt, dass diese Congruenz au für $p=2$ gilt, und daher allgemein ist.

Alle vorher aus dem in §. 7. bewiesenen Satze hergeleitete Congruenzen sind übrigens an sich wichtig und interessant.

XLIV.

Applications des théorèmes relatifs à la théorie des fractions partielles.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

§. I.

Pour qu'on puisse suivre avec plus de commodité les appl cations suivantes, nous reproduirons d'abord le théorème III. d Nro. XXXV. T. VII. de ce journal.

Théorème. Soit f_x une fonction rationnelle et entière de x degré p.

Soit F_x une fonction rationnelle et entière de x du degré q représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-1}(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

$-s)$, $n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0,$$

solue par rapport à x, dont r_0 soit toujours égale à zéro, en- rte que $n_0 - s = 0$, lorsque l'équation $F_x = 0$ n'aura pas une cine égale à zéro.

Soit φ_x une fonction auxiliaire, liée à F_x par l'équation

$$\varphi_x = (x - r_0)^s F_x,$$

étant un nombre entier et positif, pris de manière à satisfaire la condition

$$s + q > p.$$

Soit enfin, pour abréger,

$$T_k = n_k \frac{r_k^s f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}},$$

et k étant des nombres entiers et positifs. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{k=0}^{k=s} \partial_{r_k}^{n_k - 1} T_k \left\{ \frac{1}{x - r_k} + \frac{x^k}{r_k^{k+1}} \right\}.$$

Ajoutons encore que $\partial_x^n \psi_x$ désigne la dérivée, et $\partial_x^{-n} \psi_x$ l'in- ale de l'ordre n par rapport à x d'une fonction quelconque ψ_x, rte que

$$\partial_x^n \psi_x = \frac{d^n \psi_x}{dx^n}, \quad \partial_x^{-n} \psi_x = \int^n \psi_x \, dx^n.$$

Cela posé, on voit que par la formule (1) toute fonction ration- e et fractionnaire de x sera réduite aux expressions de la forme

$$\frac{1}{x - r}, \quad x^k,$$

ant un nombre entier et positif. Il suffit donc de savoir appli- une opération relative à x aux expressions

$$\frac{1}{x - r}, \quad x^k,$$

qu'on puisse appliquer cette opération à toute fonction ra- elle et fractionnaire de x. On sait, par exemple,

$$\partial_x^n \frac{1}{x - r} = \frac{n!}{(x - r)^{n+1}},$$

$$-\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 y_0$$

$$+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(2y_0+y_n)$$

$$=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)+\operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta);$$

und folglich, weil offenbar

$$\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)=0,\ \operatorname{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta)=0$$

ist:

$$M=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n);$$

also nach dem Archiv. Thl. II. S. 275. bewiesenen allgemeinen Satze von den bestimmten Integralen offenbar:

$$M=\int_a^b xydx.$$

Ferner ist

$$N=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$$

$$=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta),$$

und folglich, weil offenbar

$$\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta)=0$$

ist:

$$N=\operatorname{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n);$$

also nach dem in Rede stehenden Satze von den bestimmten Integralen:

$$N = \int_a^b y dx.$$

r ist nach dem Obigen

$$X = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}.$$

en wir ferner

$$M' = \text{Lim.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_0^2 + y_0 y_1 + y_1^2}{3(y_0 + y_1)} \cdot \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \frac{b-a}{n} \\ + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3(y_1 + y_2)} \cdot \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \frac{b-a}{n} \\ + \frac{y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2}{3(y_2 + y_3)} \cdot \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \frac{b-a}{n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-1} y_n + y_n^2}{3(y_{n-1} + y_n)} \cdot \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) \frac{b-a}{n} \end{array} \right\},$$

st nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$Y = \frac{M'}{N},$$

es nun auf die Bestimmung der Grösse M' ankommt.

Es ist aber

$$= \text{Lim.} \frac{b-a}{6n} \left\{ \begin{array}{l} y_0^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \ldots + 2y_{n-1}^2 + y_n^2 \\ + y_0 y_1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_4 + \ldots + y_{n-1} y_n \end{array} \right\},$$

folglich, weil

$$\begin{aligned} y_0 y_1 &= y_0(y_1 - y_0) + y_0^2, \\ y_1 y_2 &= y_1(y_2 - y_1) + y_1^2, \\ y_2 y_3 &= y_2(y_3 - y_2) + y_2^2, \\ y_3 y_4 &= y_3(y_4 - y_3) + y_3^2, \end{aligned}$$

u. s. w.

$$y_{n-1} y_n = y_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + y_{n-1}^2$$

$$M' =$$

$$\frac{b-a}{6n} \left\{ \begin{array}{l} 2y_0^2 + 3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 + \ldots + 3y_{n-1}^2 + y_n^2 \\ + y_0(y_1 - y_0) + y_1(y_2 - y_1) + y_2(y_3 - y_2) + \ldots + y_{n-1}(y_n - y_{n-1}) \end{array} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{Lim} . \frac{b-a}{n} (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2)$$

$$+ \tfrac{1}{6} \operatorname{Lim} . \frac{b-a}{n} \{y_0(y_1-y_0) + y_1(y_2-y_1) + y_2(y_3-y_2) + \ldots + y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}$$

$$- \tfrac{1}{6} \operatorname{Lim} . \frac{b-a}{n} (\alpha^2 + 2\beta^2).$$

Nach dem schon vorher angewandten Satze von den bestimmten Integralen ist nun

$$\operatorname{Lim} . \frac{b-a}{n} (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y^{n2}) = \int_a^b y^2 dx;$$

und nach dem Archiv. Thl. I. S. 292. §. 45. bewiesenen, ebenfalls sehr wichtigen, Satze von den Mittelgrössen ist, weil nach der Voraussetzung

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots . y_n$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, wenn wir eine gewisse Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots . y_n - y_{n-1}$$

durch μ bezeichnen:

$$y_0(y_1-y_0) + y_1(y_2-y_1) + y_2(y_3-y_2) + \ldots + y_{n-1}(y_n-y_{n-1}) = \mu (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}).$$

Also ist

$$\operatorname{Lim} . \frac{b-a}{n} \{y_0(y_1-y_0) + y_1(y_2-y_1) + y_2(y_3-y_2) + \ldots + y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}$$

$$= \operatorname{Lim} . \mu \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1})$$

$$= \operatorname{Lim} \mu . \operatorname{Lim} . \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)$$

$$= \operatorname{Lim} . \mu\beta \frac{b-a}{n}.$$

Weil nun aber nach dem schon mehrmals angewandten Satze von den bestimmten Integralen

$$\operatorname{Lim} . \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) = \int_a^b y dx$$

ist, und, wenn n in's Unendliche wächst, die Grössen

$$y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots y_n - y_{n-1};$$

also natürlich auch die Mittelgrösse μ zwischen denselben, sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern; so ist offenbar

e qui fait dépendre C de h: donc on aura

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} R_k e^{r_k x} C = \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C,$$

et l'équation (9) se réduit à

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C. \tag{10}$$

Les opérations indiquées dans le second membre de cette équation sont relatives à k et h. D'après ce qui a été dit, la lettre C sera par suite censée fonction de k et h, et pour exprimer cette dépendance, nous remplaçons C par $C_{k,h}$. Avec cette distinction nous substituons la valeur de K de l'équation (10) dans la formule (8), et il viendra

$$\left\{ \frac{1}{F\partial_x} \varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} \, dx' \right. \tag{11}$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C_{k,h}. \right.$$

En vertu d'une formule connue, on développera encore la dérivée

$$P = \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} \, dx', \tag{12}$$

de manière qu'on ait

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} \binom{h}{n_k-1} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \, \partial_{r_k}^{h} \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} \, dx',$$

ou

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} Q_{k,h} \int_x^x (x-x')^h \, e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} \, dx', \tag{13}$$

en posant, pour abréger,

$$Q_{k,h} = \binom{h}{n_k-1} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k,$$

ou, suivant l'équation (4),

$$Q_{k,h} = \binom{h}{n_k-1} n_k \partial_{r_k}^{n_k-1-h} \frac{1}{\partial_{r_k}^{n_k} F r_k}. \tag{14}$$

L'équation (13), jointe à l'équation (12), transformera la formule (11) en

$$(15)\quad \left\{\frac{1}{F\partial_x}\varphi x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{h=0}^{h=n_k}\left\{Q_{k,h}\int_x^x (x-x')^h\, e^{r_k(x-x')}\,\varphi x'\,dx' + e^{r_k x}\, x^h\, C_{k,h}\right\}\right.$$

Les formules (11) et (15) sont générales et subsistent pour toute fonction rationnelle et entière F_x et pour toute fonction φ_x. Elles se simplifieront en attribuant à F_x une forme particulière.

1. Lorsque l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'a pas de racines égales, c'est-à-dire qu'on a

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1,$$

la formule (11) se réduit à

$$(16)\quad \frac{1}{F\partial_x}\varphi x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\left\{R_k\int_x^x e^{r_k(x-x')}\,\varphi x'\,dx' + e^{r_k x}\,C_k\right\}.$$

2. Lorqu'on fait $m=1$ et qu'on substitue simplement n et r à n_1 et r_1, la formule (11) donnera

$$(17)\quad \frac{1}{F\partial_x}\varphi x = \partial_r^{n-1} R_1\int_x^x e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx' + \sum_{h=0}^{h=n} e^{rx}\,x^h\,C_h.$$

Or, pour ce cas l'équation (5) se réduit à

$$(18)\quad F_x = (x-r)^n,$$

d'où il suit

$$\partial_x^n F_x = n!,$$

et

$$\partial_r^n F_r = n!;$$

donc on aura, eu égard à l'équation (4),

$$R_1 = \frac{n}{\partial_r^n F_r} = \frac{1}{(n-1)!},$$

puis

$$\partial_r^{n-1} R_1\int_x^x e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx' = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^x \partial_r^{n-1} e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx' = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx'.$$

Cette équation jointe à l'équation (18) change la formule (17) en

$$(19)\quad \frac{1}{(\partial_x - r)^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{r(x-x')}\varphi_{x'}\, dx' + \sum_{k=0}^{k=n} e^{rx}\, x^k\, C_k .$$

3. En prenant $r=0$ dans la précédente, on obtient

$$(20)\quad \frac{1}{\partial_x^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{x'}\, dx' + \sum_{k=0}^{k=n} x^k\, C_k ,$$

formule par laquelle une intégrale multiple sera ramenée à une intégrale simple.

Il est bon d'observer qu'en résolvant par rapport à u l'équation différentielle

$$F\partial_x\, u = \varphi_x ,$$

on aura

$$u = \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x ,$$

et que par suite la valeur de u sera exprimée par le second membre de la formule (11) ou (15). On voit que cette valeur de u comprend des quantités arbitraires dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m ,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. III.

Soit Δ_x un signe d'opération déterminé par l'équation

$$(1)\quad \Delta_x f_x = \frac{f_{x+\varepsilon} - f_x}{\varepsilon} .$$

Substituons Δ_x à x dans la formule (2) §. II., et appliquons les opérations à une fonction φ_x. On aura

$$(2)\quad (F\Delta_x)^{-1}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{1}{\Delta_x - r_k}\varphi_x .$$

Or, en posant

$$y = \frac{1}{\Delta_x - r_x}\varphi_x ,$$

il suit

$$\Delta_x\, y - r_k\, y = \varphi_x ,$$

$$
\begin{aligned}
&Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\\
&=(x-a)\Big\{\begin{aligned}&Ax^3\\&+(Aa+B)x^2\\&+(Aa^2+Ba+C)x\\&+Aa^3+Ba^2+Ca+D\end{aligned}\\
&+Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E,
\end{aligned}
$$

u. s. w.

und übersieht hier auch schon das Gesetz, nach welchem di Ausdrücke fortschreiten, auf völlig unzweideutige Weise.

Nehmen wir nun dieses Gesetz für jede ganze rationale al braische Function des $(n-1)$sten Grades als gültig an, so ist

$$
\begin{aligned}
&Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Lx^2+Mx+N\\
&=Ax^n+(x-a)\Big\{\begin{aligned}&Bx^{n-2}\\&+(Ba+C)x^{n-3}\\&+(Ba^2+Ca+D)x^{n-4}\\&\quad\text{u. s. w.}\\&+(Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+Ka+L)x\\&+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka^2+La+M\end{aligned}\\
&+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+Da^{n-3}+\ldots+La^2+Ma+N.
\end{aligned}
$$

Addiren wir jetzt auf der rechten Seite des Gleichheitszeich die Grösse

$$-Aa^n+Aa^n=0,$$

und bemerken, dass

$$A(x^n-a^n)=A(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}$$

ist, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Lx^2+Mx+N\\
&=(x-a)\Big\{\begin{aligned}&Ax^{n-1}\\&+(Aa+B)x^{n-2}\\&+(Aa^2+Ba+C)x^{n-3}\\&+(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^{n-4}\\&\quad\text{u. s. w.}\\&+(Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+Ka+L)x\\&+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka^2+La+M\end{aligned}\\
&+Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+\ldots+La^2+Ma+N,
\end{aligned}
$$

und sehen also hieraus, dass das bemerkte Gesetz für jede ga rationale algebraische Function des $n$ten Grades gilt, wenn es

ce qui fait dépendre Π_x de h; donc on aura

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x .$$

C'est cette valeur de K qu'il faut substituer dans la formule (3), et pour mettre en évidence que Π_x dépend de k et h, on pourra écrire $\Pi_{x,k,h}$ au lieu de Π_x. Avec cette distinction il viendra

$$(4)\quad \begin{cases} (F_{\Delta_x})^{-1}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \dfrac{\varepsilon R_k}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_{x,k,h}. \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut faire subir à la formule (4) des transformations et des simplifications semblables à celles que l'on a fait subir à la formule (11) §. II. Observons de plus, qu'en résolvant par rapport à u l'équation aux differences finies

$$F_{\Delta_x} u = \varphi_x ,$$

le signe Δ_x étant toujours déterminé par l'équation (1), on aura

$$u = (F_{\Delta_x})^{-1} \varphi_x .$$

Donc la valeur de u sera exprimée par le second membre de l'équation (4), et l'on voit qu'elle contiendra des fonctions périodiques dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au dégré de la fonction F_x par rapport à x. Ajoutons qu'en vertu de l'équation (1) le signe Δ_x se réduira au signe ∂_x, lorsqu'on fait

$$\varepsilon = 0,$$

et que par conséquent la formule (4) réproduira la formule (11) §. II.

§. IV.

En adoptant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, et remplaçant x par le signe $\frac{\partial_x}{\partial_y}$ dans la formule (2) §. II., il vient

$$\left(F_{\frac{\partial_x}{\partial_y}}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\partial_y}{\partial_x - r_k \partial_y} .$$

$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$

u. s. w.

$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-}$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

von welchem sich nun die folgenden Anwendungen machen la

§. 3.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die n Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.a_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind.

Ist dann $f(a_1)=0$, so ist nach dem vorhergehenden Paragra

$$f(x) = (x-a_1)f_1(a_2)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$

u. s. w.

$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_2)=(a_2-a_1)f_1(a_2),$$

und folglich, wenn $f(a_2)=0$ ist, weil die Grössen a_1 und a_2 gleich sind, also nicht $a_2-a_1=0$ ist, jederzeit $f_1(a_2)=0$.

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$f(x)= (x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$

u. s. w.

$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_3)=(a_3-a_1)(a_3-a_2)f_2(a_3),$$

und folglich, wenn $f(a_3)=0$ ist, weil die Grössen a_1, a_2, a_3 un einander ungleich sind, also nicht

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)=0$$

, jederzeit $f_2(a_3)=0$.

Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$f(x)= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$

u. s. w.

$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n)$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

lso

$$f(a_4)=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)f_3(a_4),$$

nd folglich, wenn $f(a_4)=0$ ist, da die Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 nter einander ungleich sind, also nicht

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=0$$

t, jederzeit $f_3(a_4)=0$.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man ersieht aus dem Vorhergehenden auf der Stelle, dass, wenn die Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n$$

ämmtlich unter einander ungleich sind und

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

t, jederzeit auch

$$f_1(a_2)=0,\ f_2(a_3)=0,\ f_3(a_4)=0,\ f_4(a_5)=0,\ \ldots f_{n-1}(a_n)=0$$

Dann ist aber nach dem obigen allgemeinen für die Function) gefundenen Ausdrucke

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

wir gelangen daher jetzt zu dem folgenden Satze:

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische unction $f(x)$ des $n$ten Grades, deren höchstes Glied n Coefficienten A hat, jederzeit verschwindet, enn man für x nach und nach die n sämmtlich unter ander ungleichen Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n$$

etzt, so dass

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

so ist

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n).$$

§. 4.

Könnte es ausser den sämmtlich von einander verschiedenen Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

für welche

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

ist, noch eine von diesen Grössen verschiedene Grösse α geben für welche

$$f(\alpha)=0$$

wäre, so müsste, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen unter der gemachten Voraussetzung

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

ist,

$$A(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)(\alpha-a_4)\ldots(\alpha-a_n)=0$$

sein, welches ungereimt ist, da, weil nach der Voraussetzung keiner unter den Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

gleich ist, also keiner der Factoren

$$\alpha-a_1,\ \alpha-a_2,\ \alpha-a_3,\ \alpha-a_4,\ldots.\ \alpha-a_n$$

verschwindet, und natürlich auch der Coefficient A des höchsten Gliedes der Function $f(x)$ nicht verschwinden kann, weil dieselbe sonst, wie doch angenommen wurde, nicht von dem $n$ten Grade sein könnte. Dies führt uns unmittelbar zu dem folgenden bekannten Fundamentalsatze der Algebra:

Lehrsatz. Die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe der Grösse x, für welche eine von dieser Grösse abhängende ganze rationale algebraische Function verschwindet, kann nie grösser sein als der Grad dieser Function.

§. 5.

Wir wollen jetzt annehmen, dass alle im Obigen gebrauchten Symbole ganze Zahlen bezeichnen, und dass die n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots. a_n$$

in Bezug auf eine gewisse Primzahl p als Modulus sämmtlich untereinander nicht congruent seien.

membre de la formule (9). Ajoutons que cette valeur de u comprend des fonctions arbitraires, dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. V.

La formule (1) §. IV. n'est qu'un cas particulier de la formule plus générale

$$(1) \qquad \left(\frac{F\partial_x}{\nabla}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,\ldots} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\nabla}{\partial_x - r_k \nabla} \varphi_{x,y,z,\ldots},$$

∇ étant une fonction des signes $\partial_y, \partial_z, \ldots$, et $\varphi_{x,y,z,\ldots}$ une fonction des variables x, y, $z, \ldots$, auxquelles se rapportent les signes $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \ldots$. Cette formule se déduit de la formule (2) §. II. en substituant le signe ∂_x à x et appliquant les opérations à la fonction $\varphi_{x,y,z,\ldots}$. D'après ce qui a été dit dans le §. II. on en déduit

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{F\partial_x}{\nabla}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,\ldots} &= \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')\nabla} \nabla \varphi_{x',y,z}\, dx' \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=1}^{h=n_k} x^h e^{r_k x \nabla} C, \end{aligned} \right.$$

C étant indépendant de x, mais du reste arbitraire et fonction de k, h, y, $z, \ldots$. Cette formule fera dépendre l'opération

$$\left(\frac{F\partial_x}{\nabla}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z\ldots}$$

d'une opération de la forme

$$(3) \qquad e^{\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots}.$$

Lorsque le signe ∇ représente une fonction du premier degré par rapport aux caractéristiques $\partial_y, \partial_z, \ldots$, soit

$$\alpha\nabla = \alpha\partial_y + \beta\partial_z + \ldots,$$

on aura

$$e^{\alpha\nabla} f_{y,z} = e^{\alpha\partial_y + \beta\partial_z + \ldots} f_{y,z,\ldots} = f_{y+\alpha,z+\beta,\ldots}.$$

Mais le signe ∇ passant le premier degré, il ne sera plus possible d'exprimer l'expression (3) en forme finie. Toutefois, en réduisant en série, on a généralement

$$\begin{aligned} f(a_4) = \; & f(a_1) \\ & + (a_4 - a_1) f_1(a_2) \\ & + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2) f_2(a_3) \\ & + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) f_3(a_4), \end{aligned}$$

und wenn also jetzt auch $f(a_4)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, so muss offenbar auch

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) f_3(a_4)$$

durch p theilbar, d. h.

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein. Weil aber a_1, a_2, a_3, a_4 nach der Voraussetzung in E auf die Primzahl p als Modulus nicht congruent sind, so g in keiner der Differenzen $a_4 - a_1$, $a_4 - a_2$, $a_4 - a_3$ auf, und also nach dem vorher schon mehrmals angewandten Satze vo Primzahlen in $f_3(a_4)$ aufgehen, d. h. es muss

$$f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel mehr, und man übersieht aus dem Vorhergeh auf der Stelle, dass, wenn die n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

in Bezug auf die Primzahl p als Modulus unter einander congruent, und die Grössen

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), \ldots f(a_n)$$

sämmtlich durch p theilbar sind, d. h.

$$\begin{aligned} f(a_1) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_2) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_3) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_4) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ &\text{u. s. w.} \\ f(a_n) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p) \end{aligned}$$

ist: dann jederzeit auch die Grössen

$$f_1(a_2), f_2(a_3), f_3(a_4), f_4(a_5), \ldots f_{n-1}(a_n)$$

durch p theilbar sind, d. h.

par suite

$$e^{\mu^2}\, e^{\nu^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, e^{2t\mu}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, e^{2u\nu}\, du,$$

$$e^{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)}\, e^{2t\mu}\, e^{2u\nu}\, dt\, du,$$

ainsi de suite. En posant, pour fixer les idées,

$$\mu = \alpha\partial_y, \quad \nu = \beta\partial_z,$$

appliquant les opérations à une fonction de y et z, on tire de précédente

$$e^{\alpha^2\partial_y^2+\beta^2\partial_z^2} f_{y,z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)}\, e^{2\alpha t\partial_y}\, e^{2\beta u\partial_z} f_{y,z}\, dt\, du,$$

$$e^{\alpha^2\partial_y^2+\beta^2\partial_z^2} f_{y,z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} f_{y+2\alpha t,\, z+2\beta u}\, dt\, du.$$

Ajoutons toutefois que, d'après ce qu'on vient de dire, cette nulle subsistera seulement, lorsque l'expression

$$e^{-(t^2+u^2)}\, e^{2\alpha t\partial_y}\, e^{2\beta u\partial_z} f_{y,z},$$

$$e^{-(t^2+u^2)} f_{y+2\alpha t,\, z+\beta u},$$

vanouira pour $t=\pm\infty$ et $u=\pm\infty$.

XLV.

Ein paar einfache Anwendungen der geometrischen Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf cubische Gleichungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

Die durch Gauss begründete Theorie der complexen Zahlen würde nach unserer Ueberzeugung gewiss eine viel schnellere Anerkennung und Verbreitung gefunden haben, wenn es dem berühmten Geometer gefallen hätte, zugleich recht zahlreiche Anwendungen jener Theorie zu geben, und wir glauben selbst, dass es jetzt noch nicht zu spät sei, solche Anwendungen, so viel sich ihrer darbieten wollen und so einfach sie auch an sich sein mögen, aufzusuchen und bekannt zu machen. Am nächsten liegen die Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, wozu wir bereits Thl. VI. S. 225. des Archivs einen Beitrag zu geben versucht haben; ein paar der einfachsten wollen wir hier noch folgen lassen, indem wir die Voraussetzung machen, dass die Einfachheit der Gegenstände in dem angegebenen Grunde ihre Rechtfertigung finden werde. Vielleicht dürften sie Lehrern zur Benutzung beim Unterricht willkommen sein.

1.

Es sei die Gleichung

$$x^n - a = 0 \qquad (1)$$

gegeben, wo a eine positive, negative oder imaginäre Zahl bedeuten mag, so ist die vollständige Auflösung derselben in der Gleichung

Die oben im Wesentlichen nach Poinsot geführten Beise der beiden Sätze in §. 4. und dem vorliegenden Paragraphen ten, wie es uns scheint, vorzüglich deshalb ein besonderes teresse dar, weil durch dieselben die beiden genannten Theoreme, lche als die Fundamentalsätze der Algebra und der Zahlenlehre trachtet werden können, auf eine gemeinschaftliche Quelle zuckgeführt werden, welches auch der wichtigste Grund ist, welcher s veranlasst hat, dieselben hier mitzutheilen. Ausserdem verenen dieselben wegen ihrer Deutlichkeit und Strenge gewiss erhaupt recht sehr, bei dem Unterrichte in der Algebra und in r Zahlenlehre benutzt zu werden.

§. 7.

Wir wollen jetzt

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

tzen, und annehmen, dass es n in Bezug auf die Primzahl p Modulus sämmtlich unter einander nicht congruente Werthe

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

x gebe, für welche

$$\begin{aligned} f(a_1) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(a_2) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(a_3) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(a_4) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ &\text{u. s. w.} \\ f(a_n) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Dann ist nach §. 5. für jedes x

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \pmod{p}.$$

Bezeichnen wir aber überhaupt die $k$te Klasse der Combinaen ohne Wiederholungen für die Elemente

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n$$

ch

$$\mathfrak{B}_k \quad ;$$
$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$$

ist nach einem allgemein bekannten Satze

$$x' = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$$
$$x'' = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$x''' = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

in Taf. VI. Fig. 5. *B, C, D.*

Ebenso entsprechen der Gleichung

$$x^3 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) = 0,$$

wo $\varrho = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ist, die drei Wurzeln:

$$x' = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9} = 0{,}9397 + i.0{,}3420,$$
$$x'' = \cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9} = -0{,}7660 + i.0{,}6428,$$
$$x''' = \cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9} = -0{,}1736 - i.0{,}9848;$$

in Taf. IV. Fig. 6. *B, C, D.* In allen diesen Fällen führt jeder der Bögen *XB, XC, XD,* wenn man ihn von *X* aus dreimal auf der Kreisperipherie abträgt, genau wieder zu demjenigen Punkte derselben, der dem Winkel φ der gegebenen Zahl *a* entspricht, nämlich in Taf. VI. Fig. 4. zu *X*, in Taf. VI. Fig. 5. zu *C*, in Taf. VI. Fig. 6. zu *M*; die Punkte *B, C, D* selbst aber liegen um je 120 Grade aus einander.

Wenn der Modulus ϱ von *a* verschieden von Eins ist, so geht die vorstehende Operation in einem Kreise vom Halbmesser ϱ vor sich, worüber es keines Zusatzes weiter bedarf. Ebenso bedarf es kaum der Erinnerung, dass, wenn die complexe Zahl *a* in der Form $\alpha + i\beta$ gegeben ist, man ϱ und φ durch die Gleichungen

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

zu bestimmmen hat. Man vergleiche übrigens den schon angeführten Artikel Thl. VI. S. 225. des Archivs, besonders §. 3. u. §. 4.

2.

Es sei ferner die Gleichung

$$x^3 + qx + r = 0 \qquad (2)$$

gegeben, so werden bekanntlich ihre Wurzeln nach der Cardanischen Regel durch die Gleichung

$$x = y + z$$

gegeben, wo y und z an die Bedingungen gebunden sind:

$$y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3},\quad z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3},$$

$$yz = -\frac{q}{3};$$

von welchen drei Bedingungsgleichungen die letzte nur aussagt, dass das Product der zusammengehörigen Werthe von y und z reell sein müsse, wenn nämlich, wie wir hier annehmen wollen, die Coefficienten der Gleichung (2) gleichfalls reell sind.

Die Werthe von y^3 und z^3 werden reell oder imaginär, je nachdem

$$\left(\frac{q}{3}\right)^3 \gtrless -\left(\frac{r}{2}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{q}{3}\right)^3 < -\left(\frac{r}{2}\right)^2;$$

die beiden ersten von jenen Bedingungsgleichungen reduciren sich demnach im ersten Falle auf die Formen

$$y^3 = A,\quad z^3 = B;$$

im zweiten Falle auf die Formen

$$y^3 = A + iB,\quad z^3 = A - iB.$$

In beiden Fällen lässt sich demnach die Aufsuchung der drei Werthe, deren sowohl y als z fähig ist, immer nach der vorhin angegebenen Behandlung der Gleichung (1) leisten, und es tritt mithin der sogenannte Casus irreducibilis hier nicht in den Rang eines Ausnahmefalls, sondern es wird ihm im Geiste der Theorie der complexen Zahlen genau die nämliche Behandlung zu Theil, wie jedem andern in der Cardanischen Formel enthaltenen Falle.

Statt die bekannten allgemeinen Formeln zu entwickeln, die uns keine bestimmten Constructionen gestatten würden, ziehen wir es vor, die Sache an numerischen Beispielen zu erläutern.

Es sei 1) gegeben:

$$x^3 - 18x + 12 = 0,$$

so hat man

$$y^3 = -6 + \sqrt{-180},\quad z^3 = -6 - \sqrt{-180},$$
$$= -6 + i.13{,}416,\quad = -6 - i.13{,}416;$$

welche beiden complexen Werthe in Taf. VI. Fig. 7. construirt sind, wo AX die Richtung der positiven reellen und AY die Richtung der positiven imaginären Zahlen bezeichnet; $AB = -6$, $BC = i.13{,}416$, $BD = -i.13{,}416$. Um von hieraus zu den Formen

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \equiv 0 \pmod{p},$$

und folglich nach der Lehre von den Congruenzen für jedes x au

$$\left.\begin{matrix} \{A_1 + A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \end{matrix}\right\} x^{n-1} \equiv \pmod{p}.$$

Aus dieser Congruenz und der Congruenz

$$f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

folgt nach der Lehre von den Congruenzen, wenn wir der Kü wegen

$$\begin{aligned} f_2(x) = &\left.\begin{matrix} \{A_2 - A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \end{matrix}\right\} x^{n-2} \\ &+ \left.\begin{matrix} \{A_3 + A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \end{matrix}\right\} x^{n-3} \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ \left.\begin{matrix} \{A_{n-1} - (-1)^{n-1} A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \end{matrix}\right\} x \\ &+ A_n - (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n} \end{aligned}$$

setzen, für jedes x:

$$f_2(x) \equiv 0 \pmod{p};$$

also:

$$\begin{aligned} f_2(a_1) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f_2(a_2) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f_2(a_3) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f_2(a_4) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ &\text{u. s. w.)} \\ f_2(a_n) &\equiv 0 \pmod{p}; \end{aligned}$$

welches aus ganz ähnlichen Gründen wie vorher nach §. 6. wie nicht möglich ist, wenn nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2}$$

durch die Primzahl p theilbar, oder nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Also ist

$$A_2 - A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist nun schon klar, und wir werden daher jetzt zu dem folgenden Satze geführt:

Lehrsatz. Wenn

$$f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

und für n in Bezug auf die Primzahl p als Modulus unter einander nicht congruente Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ als Werthe von x

$$\begin{aligned} f(a_1) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_2) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_3) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_4) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ &\text{u. s. w.} \\ f(a_n) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p) \end{aligned}$$

ist, so ist jederzeit

$$\begin{aligned} A_1 + A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ A_2 - A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ A_3 + A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ &\text{u. s. w.} \\ A_{n-1} - (-1)^{n-1} \,.\, A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ A_n - (-1)^n \,.\, A \,.\, \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n} &\equiv 0 \text{ (Mod. } p). \end{aligned}$$

§. 8.

Es seien jetzt

$$a, b, c, d, e, \ldots$$

alle Zahlen, welche kleiner als die beliebige Zahl p und zu der

selben relative Primzahlen sind, und x sei eine ganz bel Zahl, welche mit p relative Primzahl ist. Dann sind au Producte

$$ax,\ bx,\ cx,\ dx,\ ex,\ldots.$$

mit p relative Primzahlen, weil, wenn dies nicht der Fall und also eine die Einheit übersteigende Primzahl z. B. in a p aufginge, nach einem bekannten Satze diese Primzahl ent in a oder in x aufgehen müsste, so dass also entweder a o mit p nicht relative Primzahl sein würde, was gegen die V setzung streitet. Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} ax &= \alpha p + a_1, \\ bx &= \beta p + b_1, \\ cx &= \gamma p + c_1, \\ dx &= \delta p + d_1, \\ ex &= \varepsilon p + e_1, \end{aligned}$$

u. s. w,

wo

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1,\ldots.$$

sämmtlich kleiner als p sind, so kann leicht gezeigt werden, diese Grössen sämmtlich zu p relative Primzahlen und sämt unter einander ungleich sind. Wäre nämlich z. B. a_1 nicl p relative Primzahl, und ginge folglich eine die Einheit übe gende Primzahl in a_1 und p auf, so würde wegen der Glei

$$ax = \alpha p + a_1$$

diese Primzahl auch in ax, folglich nach dem schon vorher wandten Satze entweder in a oder in x aufgehen, und es v also entweder a oder x nicht mit p relative Primzahl sein, gegen die Voraussetzung streitet. Wäre ferner z. B. $a_1 = d_1$ wäre wegen der beiden Gleichungen

$$ax = \alpha p + a_1,\ dx = \delta p + d_1$$

offenbar

$$ax - \alpha p = dx - \delta p,$$

und folglich

$$(a-d)x = (\alpha-\delta)p.$$

Also ginge p, welches mit x relative Primzahl ist, in $(a-$ auf, und müsste folglich nach einem bekannten Satze in aufgehen, was ungereimt ist, da nach der Voraussetzung de solute Werth von $a-d$ offenbar kleiner als p ist. Weil nun nach die Zahlen

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots,$$

n Anzahl der Anzahl der Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots$$

:h ist, sämmtlich kleiner als p, unter einander ungleich und) relative Primzahlen sind, so ist klar, dass ohne Rücksicht die Ordnung die Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots$$

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots$$

einander nicht verschieden sind, und dass also jederzeit

$$abcde\ldots = a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots$$

Bezeichnen wir aber die Anzahl der Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots,$$

he kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind, durch n,)lgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax &= \alpha p + a_1, \\ bx &= \beta p + b_1, \\ cx &= \gamma p + c_1, \\ dx &= \delta p + d_1, \\ ex &= \varepsilon p + e_1, \end{aligned}$$

u. s. w.

ı Multiplication auf der Stelle, dass die Differenz der Producte

$$x^n abcde\ldots \text{ und } a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots,$$

nach dem Vorhergehenden die Differenz der Producte

$$x^n abcde\ldots \text{ und } abcde\ldots$$

h p theilbar, oder dass

$$(x^n - 1)\, abcde\ldots \equiv 0 \pmod{p}$$

Weil nun aber

$$a, b, c, d, e, \ldots$$

) sämmtlich relative Primzahlen sind, so muss nach einem nten Satze p in $x^n - 1$ aufgehen, d. h. es muss

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, noch eine diesen Grössen in Bezug auf den Modulus p nicht congruente Grösse α geben, für welche $f(\alpha)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(\alpha) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

wäre, so müsste, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen unter den gemachten Voraussetzungen

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p)$$

ist, offenbar

$$A(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)(\alpha-a_4)\ldots(\alpha-a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein, welches, wenn die Primzahl p in A nicht aufgeht, nach dem oben schon mehrmals angewandten Satze von den Primzahlen ungereimt ist, da p unter den gemachten Voraussetzungen auch in keinem der Factoren

$$\alpha-a_1,\ \alpha-a_2,\ \alpha-a_3,\ \alpha-a_4,\ \ldots\alpha-a_n$$

aufgehen kann. Dies führt uns unmittelbar zu dem folgenden bekannten Fundamentalsatze der Zahlenlehre:

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x ist, und die Primzahl p in dem Coefficienten des höchsten Gliedes dieser Function nicht aufgeht, so kann es nie mehr als n in Bezug auf den Modulus p unter einander nicht congruente Werthe von x geben, für welche

$$f(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist.

Andere Beweise dieses Satzes haben Gauss (Disquisitiones arithmeticae. p. 40.), Lagrange (Mem. de l'Acad. des sc. de Berlin. 1767. p. 192.), Legendre (Hist. de l'Acad. des sc. de Paris. 1785.) und Euler (Nov. Comm. Acad. sc. Petrop. T. XVIII. pag. 93.), letzterer jedoch nur für einen besonderen Fall, gegeben. Auch s. m. das Mathematische Wörterbuch. Art. Zahl. Nr. 19. und Archiv der Mathematik und Physik. Thl. II. S. 5.

Die oben im Wesentlichen nach Poinsot geführten Beise der beiden Sätze in §. 4. und dem vorliegenden Paragraphen ten, wie es uns scheint, vorzüglich deshalb ein besonderes teresse dar, weil durch dieselben die beiden genannten Theoreme, iche als die Fundamentalsätze der Algebra und der Zahlenlehre trachtet werden können, auf eine gemeinschaftliche Quelle zukgeführt werden, welches auch der wichtigste Grund ist, welcher s veranlasst hat, dieselben hier mitzutheilen. Ausserdem verenen dieselben wegen ihrer Deutlichkeit und Strenge gewiss haupt recht sehr, bei dem Unterrichte in der Algebra und in Zahlenlehre benutzt zu werden.

§. 7.

Wir wollen jetzt

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

tzen, und annehmen, dass es n in Bezug auf die Primzahl p Modulus sämmtlich unter einander nicht congruente Werthe

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

x gebe, für welche

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

t. Dann ist nach §. 5. für jedes x

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p).$$

Bezeichnen wir aber überhaupt die $k$te Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen für die Elemente

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots a_n$$

urch

$$\mathfrak{A}_k \quad ;$$
$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$$

o ist nach einem allgemein bekannten Satze

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

$$= x^n - \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \cdot x^{n-1}$$

$$+ \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \cdot x^{n-2}$$

$$- \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \cdot x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \cdot x$$

$$+ (-1)^n \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n}$$

und folglich nach dem Obigen für jedes x:

$$Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$\equiv Ax^n - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \cdot x^{n-1}$$

$$+ A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \cdot x^{n-2}$$

$$- A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \cdot x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{n-1} \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \cdot x$$

$$+ (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n} \quad (\text{Mod. } p).$$

Also ist, wenn wir der Kürze wegen

$$f_1(x) = \{A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{A}_1}\} x^{n-1}$$
$$+ \{A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{A}_2}\} x^{n-2}$$
$$+ \{A_3 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{A}_3}\} x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ \{A_{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{A}_{n-1}}\} x$$
$$+ A_n - (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{A}_n}$$

setzen, für jedes x

$$f_1(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Folglich ist

$$f_1(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_1(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_1(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_1(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

u. s. w.

$$f_1(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Dies könnte, da n die Anzahl der in Bezug auf die Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruenten Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n;$$

der Grad der Function $f_1(x)$ aber nur $n-1$ ist, nach dem in §. 6. bewiesenen Lehrsatze nicht der Fall sein, wenn die Primzahl p in dem Coefficienten

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{A}_1}$$

nicht aufginge, d. h. wenn nicht

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{A}_1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

wäre. Also ist

oder, wie man im Geiste der analytischen Geometrie schreiben würde,

$$y = F(x', x'')$$

als Gleichung der resultirenden Fläche

Setzt man ebenso im zweiten Falle $y = y' + iy''$ und zerfällt $f(x)$ in die beiden Theile $\varphi(x) + i\psi(x)$, so sind gleichfalls im Geiste der analytischen Geometrie

$$y' = \varphi(x), \quad y'' = \psi(x)$$

die beiden Gleichungen der entstehenden Linie.

4.

Es liegt auf der Hand, dass die beiden angegebenen Constructionsmethoden auch dann noch anwendbar bleiben, wenn für beide veränderliche x und y imaginäre Werthe zugelassen werden, aber zugleich eines von den vier Bestimmungsstücken dieser beiden complexen Werthe in der Construction unbeachtet bleiben darf. Mit Hülfe dieser Bemerkung sind wir im Stande, die Mehrzahl der bis jezt gegebenen Beweise des Satzes:

> dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann,

an dem Faden der genannten Constructionsmethoden systematisch zu reproduciren.

Es sei die Function $y = f(x)$ von der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n,$$

und man erhalte durch die Substitution

$$x = p + iq = r(\cos t + i \sin t)$$

das Resultat

$$y = P + iQ = R(\cos T + i \sin T),$$

so ist zu beweisen, dass man durch schickliche Wahl von x zu dem Resultate $y = 0$, d. h. entweder

$$R = 0,$$

wobei T jeden beliebigen Werth haben kann, oder gleichzeitig

$$P = 0, \quad Q = 0$$

gelangen könne.

sera réduite à la recherche des expressions

$$\frac{1}{\partial_x - r_k}\varphi_x\,,\quad \partial_x^k\,\varphi_x\,.$$

Mais f_x étant une fonction rationnelle et entière de x, on trouvera directement $f_{\partial_x}\,\varphi_x$. Nous faisons donc pour plus de simplicité

$$f_x = 1\,,$$

de sorte qu'on peut prendre $s=0$ et $n_0=0$. Dans ce cas la formule (1) §. I. se réduira à

$$\frac{1}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{R_k}{x-r_k}\,, \tag{3}$$

et l'équation (1) §. II. deviendra

$$\frac{1}{F_{\partial_x}}\,\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\,R_k\,\frac{1}{\partial_x - r_k}\,\varphi_x\,, \tag{9}$$

R_k et F_x étant déterminés par les équations

$$R_k = \frac{n_k}{\partial_{r_k}^{n_k}\,F_{r_k}}\,, \tag{4}$$

$$F_x = (x-r_1)^{n_1}\,(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m}. \tag{5}$$

Posons maintenant

$$y = \frac{1}{\partial_x - r_k}\,\varphi_x\,; \tag{6}$$

on aura

$$(\partial_x - r_k)\,y = \varphi_x\,,$$

ou

$$\partial_x\,y - r_k\,y = \varphi_x\,,$$

équation différentielle à laquelle on satisfait en prenant

$$y = e^{r_k x}\int e^{-r_k x}\,\varphi_x\,dx\,,$$

et substituant cette valeur de y dans l'équation (6) on trouvera

$$\frac{1}{\partial_x - r_k}\,\varphi_x = e^{r_k x}\int e^{-r_k x}\,\varphi_x\,dx.$$

Donc l'équation (3) se changera en

der Fläche an dieser Stelle das Ansehen eines Wasserwirbels oder Wasserstrudels erhält. Die Existenz solcher Stellen der Fläche wären also nachzuweisen.

Zum Behufe dieser Nachweisung führt Gauss die genannte Eigenthümlichkeit auf die analytische Thatsache zurück, dass an den betreffenden Stellen die Grösse

$$V = \frac{\partial^2 T}{\partial r . \partial t}$$

unendlich gross wird, und beweist nun, dass, wenn man für r einen hinlänglich grossen Werth r_0 an die Stelle setzt, die Gleichung

$$\int_0^{r_0} \partial r \int_0^{2\pi} V \partial t = \int_0^{2\pi} \partial t \int_0^{r_0} V \partial r$$

aufhört richtig zu bleiben, dass mithin V innerhalb der Gränzen der Integration eine Unterbrechung der Continuität erleiden muss, welche sodann unmittelbar die verlangte Folge nach sich zieht.

Erster Beweis von Gauss *).

Zieht man statt R und T, welche in den beiden vorhergehenden Beweisen betrachtet wurden, die beiden Grössen P und Q in Betracht, und construirt dieselben als Functionen von x gleichfalls nach der ersten der in §. 3. angegebenen Constructionsmethoden, so erhält man zwei Flächen, von denen leicht nachgewiesen werden kann, dass sie beide die Ebene der x schneiden.

Die Gleichungen der beiden Durchschnittscurven sind

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

und es kommt mithin jetzt noch darauf an zu zeigen, dass beide Curven auch einander schneiden müssen, damit man gleichzeitig habe $P=0$ und $Q=0$. Dazu führt aber eine specielle Betrachtung der beiden Curven selbst, wie sie Gauss a. a. O. anstellt

Beweis von Deahna **).

Um die complexe Zahl y nach der zweiten Constructionsmethode des §. 3. in einer Ebene für sich dargestellt zu erhalten, dürfte der einzige brauchbare Weg darin bestehen, dass man die Achse der x als Achse der r ansieht und zugleich für jeden Werth von r den Winkel t (der in der Construction nicht sichtbar wird) alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen lässt. Alsdann erhält man als geometrisches Bild der gegebenen Function nicht eine Linie,

---

*) Demonstratio nova Theorematis etc. Helmstadii. 1799.

**) Crelle's Journal. 20. Band. S. 337.

e qui fait dépendre C de h: donc on aura

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} R_k e^{r_k x} C = \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C,$$

et l'équation (9) se réduit à

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C. \tag{10}$$

Les opérations indiquées dans le second membre de cette équation sont relatives à k et h. D'après ce qui a été dit, la lettre C sera par suite censée fonction de k et h, et pour exprimer cette dépendance, nous remplaçons C par $C_{k,h}$. Avec cette distinction nous substituons la valeur de K de l'équation (10) dans la formule (8), et il viendra

$$\left\{ \frac{1}{F\partial_x} \varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} dx' + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C_{k,h} . \right. \tag{11}$$

En vertu d'une formule connue, on développera encore la dérivée

$$P = \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} dx', \tag{12}$$

de manière qu'on ait

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} \overset{h}{(n_k-1)} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \partial_{r_k}^{h} \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} dx',$$

ou

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} Q_{k,h} \int_x^x (x-x')^h e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'} dx', \tag{13}$$

en posant, pour abréger,

$$Q_{k,h} = \overset{h}{(n_k-1)} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k,$$

ou, suivant l'équation (4),

$$Q_{k,h} = \overset{h}{(n_k-1)} n_k \partial_{r_k}^{n_k-1-h} \frac{1}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}. \tag{14}$$

L'équation (13), jointe à l'équation (12), transformera la formule (11) en

$$(15)\quad \left\{\frac{1}{F\partial_x}\varphi x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{h=0}^{h=n_k}\left\{\begin{array}{c} Q_{k,h}\int_x^x (x-x')^h\, e^{r_k(x-x')}\,\varphi x'\,dx' \\ +\, e^{r_k x}\, x^h\, C_{k,h}\end{array}\right\}\right.$$

Les formules (11) et (15) sont générales et subsistent pour toute fonction rationnelle et entière F_x et pour toute fonction φx. Elles se simplifieront en attribuant à F_x une forme particulière.

1. Lorsque l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'a pas de racines égales, c'est-à-dire qu'on a

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1,$$

la formule (11) se réduit à

$$(16)\quad \frac{1}{F\partial_x}\varphi x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\left\{R_k\int_x^x e^{r_k(x-x')}\,\varphi x'\,dx' + e^{r_k x}\,C_k\right\}.$$

2. Lorqu'on fait $m=1$ et qu'on substitue simplement n et 1 à n_1 et r_1, la formule (11) donnera

$$(17)\quad \frac{1}{F\partial_x}\varphi x = \partial_r^{n-1} R_1\int_x^x e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx' + \sum_{k=0}^{k=n} e^{rx}\,x^k\,C_k.$$

Or, pour ce cas l'équation (5) se réduit à

$$(18)\quad F_x = (x-r)^n,$$

d'où il suit

$$\partial_x^n F_x = n!,$$

et

$$\partial_r^n F_r = n!;$$

donc on aura, eu égard à l'équation (4),

$$R_1 = \frac{n}{\partial_r^n F_r} = \frac{1}{(n-1)!},$$

puis

$$\partial_r^{n-1} R_1\int_x^x e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx' = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^x \partial_r^{n-1} e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx'$$
$$= \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{r(x-x')}\,\varphi x'\,dx'.$$

Cette équation jointe à l'équation (18) change la formule (17) en

$$(19)\quad \frac{1}{(\partial_x - r)^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{r(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{k=0}^{k=n} e^{rx}\,x^k\,C_k\,.$$

3. En prenant $r=0$ dans la précédente, on obtient

$$(20)\quad \frac{1}{\partial_x^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{k=0}^{k=n} x^k\,C_k\,,$$

formule par laquelle une intégrale multiple sera ramenée à une intégrale simple.

Il est bon d'observer qu'en résolvant par rapport à u l'équation différentielle

$$F_{\partial_x}\,u = \varphi_x\,,$$

on aura

$$u = \frac{1}{F_{\partial_x}}\,\varphi_x\,,$$

et que par suite la valeur de u sera exprimée par le second membre de la formule (11) ou (15). On voit que cette valeur de u comprend des quantités arbitraires dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. III.

Soit Δ_x un signe d'opération déterminé par l'équation

$$(1)\quad \Delta_x f_x = \frac{f_{x+\varepsilon} - f_x}{\varepsilon}\,.$$

Substituons Δ_x à x dans la formule (2) §. II., et appliquons les opérations à une fonction φ_x. On aura

$$(2)\quad (F_{\Delta_x})^{-1}\,\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{1}{\Delta_x - r_k}\varphi_x\,.$$

Or, en posant

$$y = \frac{1}{\Delta_x - r_x}\varphi_x\,,$$

il suit

$$\Delta_x\, y - r_k\, y = \varphi_x\,,$$

équation aux différences finies, qui sera verifiée en prenant

$$y = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k}(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Sigma (1+\varepsilon r_k)^{-\frac{x}{\varepsilon}} \varphi_x ,$$

ou

$$y = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x ,$$

x étant une valeur particulière de x, le signe Σ se rapporta à la variable x', dont l'accroissement est représenté par ε, Π_x étant une fonction qui ne change pas, si l'on attribue à l'accroissement ε, mais du reste arbitraire et fonction de r et On aura par suite

$$\frac{1}{\Delta_x - r_k} \varphi_x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x ,$$

ce qui change la formule (2) en

$$(3) \quad (F\Delta_x)^{-1} \varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{\varepsilon R_k}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + K,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} R_k \Pi_x .$$

Suivant une formule connue on déduit de celle-ci

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} (n_k \overset{h}{-} 1) \partial_{r_k}^{h} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi_x$$

et comme on a

$$\partial_{r_k}^{h} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} = x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}-h} ,$$

il viendra

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \frac{(n_k \overset{h}{-} 1)}{(1+\varepsilon r_k)^h} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} ,$$

Or, $\frac{(n_k \overset{h}{-} 1)}{(1+\varepsilon r_k)^h}$ et R_k étant indépendants de x, et Π_x représentant une fonction arbitraire des variables autres que x, on substituera simplement Π_x à

$$\frac{(n_k \overset{h}{-} 1)}{(1+\varepsilon r_k)^h} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi_x ,$$

e qui fait dépendre Π_x de h; donc on aura

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x .$$

C'est cette valeur de K qu'il faut substituer dans la formule (3), et pour mettre en évidence que Π_x dépend de k et h, on pourra écrire $\Pi_{x,k,h}$ au lieu de Π_x. Avec cette distinction il viendra

$$(4)\quad \begin{cases} (F_{\Delta_x})^{-1}\, \varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \dfrac{\varepsilon R_k}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_{x,k,h}. \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut faire subir à la formule (4) des transformations et des simplifications semblables à celles que l'on a fait subir à la formule (11) §. II. Observons de plus, qu'en résolvant par rapport à u l'équation aux differences finies

$$F_{\Delta_x}\, u = \varphi_x ,$$

le signe Δ_x étant toujours déterminé par l'équation (1), on aura

$$u = (F_{\Delta_x})^{-1}\, \varphi_x .$$

Donc la valeur de u sera exprimée par le second membre de l'équation (4), et l'on voit qu'elle contiendra des fonctions périodiques dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

égal au dégré de la fonction F_x par rapport à x. Ajoutons qu'en vertu de l'équation (1) le signe Δ_x se réduira au signe ∂_x, lorsqu'on fait

$$\varepsilon = 0,$$

et que par conséquent la formule (4) réproduira la formule (11) §. II.

§. IV.

En adoptant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, et remplaçant x par le signe $\frac{\partial_x}{\partial_y}$ dans la formule (2) §. II., il vient

$$\left(F_{\frac{\partial_x}{\partial_y}}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\partial_y}{\partial_x - r_k \partial_y} .$$

Soit $\varphi_{x,y}$ une fonction des variables x, y, auxquelles se portent les signes ∂_x, ∂_y. On déduit de l'équation précédent

$$\left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \varphi_{x,y} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\partial_y}{\partial_x - r_k \partial_y} \varphi_{x,y},$$

et, en vertu des principes établis dans le §. II., cette formule mise sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \varphi_{x,y} = & \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')\partial_y} \partial_y \varphi_{x',y} dx', \\ & + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h e^{r_k x \partial_y} C_{y,k}, \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a généralement

$$(2) \qquad e^{a\partial_\nu} \psi_\nu = \psi_{\nu+a},$$

et

$$(3) \qquad \partial_{\nu+a}^n \psi_{\nu+a} = \partial_\nu^n \psi_{\nu+a},$$

ce qui change la précédente en

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \varphi_{x,y} = & \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \partial_y \varphi_{x',y+r_k(x-x')} dx' \\ & + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h C_{y+r_k x,k}, \end{aligned} \right.$$

formule qui fait voir comment l'opération

$$\left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1}$$

peut être appliquée a une fonction quelconque de x et y. Pc maintenant

$$(5) \qquad \varphi_{x,y} = \partial_y^{-p} f_{x,y},$$

p étant le degré de F_x par rapport à x. On aura

$$\partial_y \varphi_{x',y} = \partial_y^{-(p-1)} f_{x';y},$$

et, en vertu de la formule (20) §. II.,

$$\partial_y \varphi_{x',y} = \int_y^y \frac{(y-y')^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'} dy' + \sum_{h=0}^{h=p-1} y^h B_h,$$

y étant une valeur particulière de y, et B_h désignant une qu

indépendante de y, mais du reste arbitraire et fonction de h et x. De plus on tire de la précédente, eu égard à la formule (3),

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_y\, \varphi_{x',y+r_k(x-x')} = \displaystyle\int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dy' \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{h=0}^{h=p-1} [y+r_k(x-x')]^h\, B_h\,. \end{cases}$$

En substituant les valeurs de $\varphi_{x,y}$ et $\partial_y\, \varphi_{x',y+r_k(x-x')}$ tirées des équations (5) et (6) dans la formule (4), il viendra

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \partial_y^{-p} f_{x,y} = \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dx'\, dy' \\ \qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h\, C_{y+r_k x,k,h} + H, \end{cases}$$

la valeur de H étant fournie par l'équation

$$H = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} [y+r_k(x-x')]^h\, B_h\, dx'.$$

Puis on a

$$[y+r_k(x-x')]^h = \sum_{n=0}^{n=h+1} \overset{n}{(h)}\, y^{h-n}\, r_k^n\, (x-x')^n\,,$$

n étant un nombre entier : donc

$$H = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} \sum_{n=0}^{n=h+1} \overset{n}{(h)}\, y^{h-n}\, r_k^n\, (x-x')^n\, B_h\, dx'\,,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$(8)\qquad H = \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} \sum_{n=0}^{n=h+1} \overset{n}{(h)}\, B_h\, y^{h-n}\, (x-x')^n\, N dx'\,,$$

ayant fait, pour abréger,

$$N = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k\, r_k^n\,,$$

ou bien, suivant l'équation (4) §. II.,

$$N = \sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^n}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}\,.$$

Coefficient x'' der complexen Zahl $x = x' + ix''$ sind *). Man kann mithin in der durch die Gleichung

$$y = \text{Coëff. real. } (ax + b)$$

dargestellten Fläche unzählig viele gerade Linien angeben, die einander parallel sind und deren Durchschnittspunkte mit der Ebene der x wieder eine gerade Linie bilden; jene Fläche ist folglich eine Ebene.

Dass man ebenso die Bedeutung der zweiten Gleichung

$$y = \text{Coëff. imag. } (ax + b)$$

nachweisen kann, liegt auf der Hand; diese Gleichung stellt also gleichfalls eine Ebene dar.

Setzt man $B = 0$, so nehmen beide Gleichungen die Formen an

$$y = \text{Coëff. real. } b, \quad y = \text{Coeff. imag. } b,$$

und jede stellt in diesem Falle eine zur Ebene der x parallele Ebene dar; und ist ausserdem $C = 0$, folglich

$$y = 0,$$

so hat man die Ebene der x selbst. Dies ist genau derselbe Fall, der oben bei der Discussion der geraden Linie unter der Annahme $A = 0$ eintrat; denn dort hatten die Buchstaben x und y die umgekehrte Bedeutung von ihrer jetzigen.

Nehmen wir aber hier $A = 0$, so zerfällt die Gleichung

$$Bx + C = 0$$

sofort in die beiden

$$\text{Coëff. real. } (Bx + C) = 0,$$
$$\text{Coëff. imag. } (Bx + C) = 0;$$

von denen jede eine durch die Achse der y gelegte Ebene darstellt.

7.

Der Gang unserer Untersuchung hat uns von vorn herein gleichsam von selbst darauf geführt, bei der Betrachtung der Linie stets von einer Achse der x und einer Ebene der y; dagegen bei der Betrachtung der Fläche von einer Ebene der x und einer Achse der y zu sprechen. Obgleich diese Ver-

*) Beiläufig erhalten wir hier noch ein neues Mittel, um die Gleichung einer Linie in der Ebene darzustellen, worauf wir jedoch gegenwärtig nicht weiter eingehen wollen.

nombre de la formule (9). Ajoutons que cette valeur de u comprend des fonctions arbitraires, dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. V.

La formule (1) §. IV. n'est qu'un cas particulier de la formule plus générale

$$\left(\frac{F\partial_x}{\overline{\nabla}}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,..} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\nabla}{\partial_x - r_k \nabla} \varphi_{x,y,z,..},$$

étant une fonction des signes $\partial_y, \partial_z, \ldots$, et $\varphi_{x,y,z,\ldots}$ une fonction des variables x, y, z,.., auxquelles se rapportent les signes $\partial_y, \partial_z, \ldots$. Cette formule se déduit de la formule (2) §. II. en substituant le signe ∂_x à x et appliquant les opérations à la fonction $\varphi_{x,y,z,\ldots}$. D'après ce qui a été dit dans le §. II. on en déduit

$$\left\{\begin{aligned}\left(\frac{F\partial_x}{\overline{\nabla}}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,..} &= \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')\nabla}{}_\nabla \, \varphi_{x',y,z}\, dx' \\ &+ \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=1}^{h=n_k} x^h e^{r_k x \nabla} C,\end{aligned}\right.$$

étant indépendant de x, mais du reste arbitraire et fonction de k, y, z,... Cette formule fera dépendre l'opération

$$\left(\frac{F\partial_x}{\overline{\nabla}}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z\ldots}$$

une opération de la forme

$$e^{\alpha\nabla} f_{y,z,..} .$$

Lorsque le signe ∇ représente une fonction du premier degré par rapport aux caractéristiques $\partial_y, \partial_z, \ldots$, soit

$$\alpha_\nabla = \alpha\partial_y + \beta\partial_z + \ldots,$$

sera

$$e^{\alpha\nabla} f_{y,z} = e^{\alpha\partial_y + \beta\partial_z + \cdots} f_{y,z,..} = f_{y+\alpha,z+\beta,..} .$$

Mais le signe ∇ passant le premier degré, il ne sera plus ible d'exprimer l'expression (3) en forme finie. Toutefois, en sant en série, on a généralement

$$\cos\lambda = \cos(\operatorname{arc\,tg}\varrho).\cos(\operatorname{arc\,tg}\varrho') + \sin(\operatorname{arc\,tg}\varrho)\sin(\operatorname{arc\,tg}\varrho')\cos(\varphi-\varphi')$$

oder

$$\cos\lambda = \frac{1+\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')}{\sqrt{1+\varrho^2}\,.\,\sqrt{1+\varrho'^2}}.$$

Sollen beide Linien auf einander rechtwinklig stehen, so hat man $\cos\lambda = 0$, folglich

$$\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi') = -1,$$

wofür man auch schreiben kann

$$a'c' + a''c'' = -1,$$

wenn $a = a' + ia''$ und $c = c' + ic''$ gesetzt wird.

Um hievon eine Anwendung zu machen, wollen wir die Aufgabe lösen: durch den Nullpunkt des Systems normal zu der Geraden

$$y = ax + b$$

eine Ebene zu legen.

Bezeichnet man mit

$$y = cx$$
$$= (c' + ic'')x$$

eine durch den Nullpunkt des Systems gelegte Gerade, so wird diese in der gesuchten Ebene enthalten sein, wenn man gleichzeitig hat

$$a'c' + a''c'' = -1.$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichung eine der beiden Unbestimmten c' und c'', z. B. die erste, so erhält man

$$a'y + x = ia''x,$$

und da hier c'' noch jedes beliebigen reellen Werthes kann fähig sein, insofern die Gerade $y = cx$ eine beliebige Lage innerhalb der gesuchten Ebene haben darf, so umfasst die Gleichung

$$\text{Coëff. real.}\ \frac{a'y+x}{ax} = 0$$

alle Lagen der Geraden $y = cx$, welche dieselbe normal zu der Geraden $y = ax + b$ annehmen kann, und ist folglich die Gleichung der gesuchten Ebene. Man kann dieselbe, um die reelle

Coordinate x als solche getrennt hervortreten zu lassen, auch auf die Form bringen *)

$$\text{Coëff. real.}\left(\frac{a'y}{a}\right) = -x \,.\, \text{Coëff. real.}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Hätte man oben c'' statt c' eliminirt, so würde man als Gleichung der Ebene schliesslich erhalten haben

$$\text{Coëff. imag.}\left(\frac{ia''y}{a}\right) = x \text{ Coëff. imag.}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Beide Gleichungen aber sind identisch, denn sie lassen sich auf die Form

$$x = -(a'^2 + a''^2) \,.\, \text{Coëff. real.}\left(\frac{y}{a}\right)$$

zurückführen.

Man kann hieraus einen Schluss ziehen, welcher der Discussion der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax + b)$$

in §. 6. (wo die Coordinaten die umgekehrte Bedeutung haben wie vorhin) zur Ergänzung dienen kann. Fällt man nämlich auf diese Ebene aus dem Nullpunkte des Systems ein Perpendikel, so bezeichnet Mod. a die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen dieses Perpendikel mit der Achse der y einschliesst; und π — Arc. a den Neigungswinkel, welchen eine durch dieses Perpendikel und die Achse der y gelegte Ebene mit der Ebene $x'y$ bildet. Folglich ist zugleich Mod. a die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Ebene

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax + b)$$

mit der Ebene der x; und $\frac{\pi}{2}$ — Arc. a derjenige Winkel, welchen die Schnittlinie jener Ebene mit der Ebene der x in dieser Ebene mit der reellen Achse der x' einschliesst. Die Gleichung jenes Perpendikels selbst aber wird

$$x = -(a'^2 + a''^2)\frac{y}{a},$$

wo y seine reelle und x seine complexe Coordinate bezeichnet.

---

*) Durch Anwendung der Gleichungen Coëff. real. $(A \pm B) =$ Coëff. real. $A \pm$ Coëff. real. B; Coëff. real. $\frac{A}{n} = \frac{1}{n}$ Coëff. real. A, wenn n reell ist, etc. Diese und ähnliche Gleichungen lassen sich leicht aus der Natur der hier eingeführten Function nachweisen.

XLV.

Ein paar einfache Anwendungen der geometrischen Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf cubische Gleichungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

Die durch Gauss begründete Theorie der complexen Zahlen würde nach unserer Ueberzeugung gewiss eine viel schnellere Anerkennung und Verbreitung gefunden haben, wenn es dem berühmten Geometer gefallen hätte, zugleich recht zahlreiche Anwendungen jener Theorie zu geben, und wir glauben selbst, dass es jetzt noch nicht zu spät sei, solche Anwendungen, so viel sich ihrer darbieten wollen und so einfach sie auch an sich sein mögen, aufzusuchen und bekannt zu machen. Am nächsten liegen die Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, wozu wir bereits Thl. VI. S. 225. des Archivs einen Beitrag zu geben versucht haben; ein paar der einfachsten wollen wir hier noch folgen lassen, indem wir die Voraussetzung machen, dass die Einfachheit der Gegenstände in dem angegebenen Grunde ihre Rechtfertigung finden werde. Vielleicht dürften sie Lehrern zur Benutzung beim Unterricht willkommen sein.

1.

Es sei die Gleichung

$$x^n - a = 0 \qquad (1)$$

gegeben, wo a eine positive, negative oder imaginäre Zahl bedeuten mag, so ist die vollständige Auflösung derselben in der Gleichung

$$x = \sqrt[n]{((a))}$$

thalten. Denn man construire die Zahl a in der Ebene der mplexen Zahlen, und sie nehme daselbst die Gestalt an $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wo φ einen zwischen 0 incl. und 2π enthaltenen Winkel darstellt; so wird der Gleichung (1) jeder complexe Werth x genügen, dessen Modulus, zur Potenz n erhoben, $= \varrho$ und essen Winkel, n mal gesetzt, entweder φ selbst oder einen um Vielfaches von 2π davon verschiedenen Werth liefert, d. h. an wird haben

$$x = \varrho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

für k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl oder ull gesetzt werden darf. Dass dieser Ausdruck übrigens nur n einander verschiedene Werthe darstellt, die in der Ebene der mplexen Zahlen gleichförmig vertheilt auf der Peripherie eines reises vom Halbmesser $\varrho^{\frac{1}{n}}$ liegen, ergibt sich aus der Conruction des Ausdrucks unmittelbar.

So entsprechen z. B. der Gleichung

$$x^3 - 1 = 0,$$

$\varrho = 1$ und $\varphi = 0$ zu setzen ist, die drei Wurzeln:

$$x' = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$x'' = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\ *),$$

$$x''' = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

he in der Ebene der complexen Zahlen, Taf. VI. Fig. 4., wo AX positive reelle und AY die positive imaginäre Einheit bezeichnet, h die Punkte X, B, C dargestellt werden. Diese Werthe den erhalten, indem man $k = 0, 1, 2$ setzte; wollte man $= 3$ etc. annehmen, so würde man nur wieder zu den nämlichen kten der Ebene gelangen.

Oder der Gleichung

$$x^3 + 1 = 0,$$

$\varrho = 1$ und $\varphi = \pi$ zu setzen ist, entsprechen die drei Wurzeln:

*) Wir verstehen, nach Cauchy, immer die positive Wurzel, wir ein einfaches Wurzelzeichen setzen.

Das allgemeine Glied der durch K' entstehenden Reihe ist

$$\frac{(n+r+2)(n+r+3)}{1.2}x^{n+r+1}$$

$$= \left[\frac{n^2+(2r+5)n+(r+2)(r+3)}{1.2}\right]x^{n+r+1}$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)+(2r+5-3)(n+1)+r^2+3r+4}{1.2}\right]x^{n+r+1}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^{n+r+1}+\frac{2r+2}{1.2}(n+1)x^{n+r+1}+\frac{r^2+3r+4}{1.2}x^{n+r+1};$$

folglich der erzeugende Bruch

$$K' = \frac{x^{r+1}}{(1-x)^3}+(r+1)\frac{x^{r+1}}{(1-x)^2}+\frac{r^2+3r+4}{2}\cdot\frac{x^{r+1}}{1-x}$$

$$= \frac{x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2})-x^{r+2}(r^2+4r+5)}{(1-x)^3}+\frac{\frac{r^2+3r+4}{2}x^{r+3}}{(1-x)^3}.$$

Mithin

$$\sum_0^r \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n =$$

$$\frac{1-x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2})+x^{r+2}(r^2+4r+5)-x^{r+3}(\frac{r^2+3r+4}{2})}{(1-x)^3}.$$

3) Es soll die Summe $\sum_0^r x^n \cos nt$ angegeben werden.

Nach §. 4. ist hier $R=1$, $b=1$, $r=1$, $T=t$, also

$$K=\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x^{n+r+1}\cos(n+r+1)t$ als allgemeines Glied ist $R=b=r=1$, $T=-(rt)$, mithin

$$K' = \frac{\cos(r+1)t-x\cos rt}{1-2x\cos t+x^2}x^{r+1},$$

folglich

$$\sum_0^r x^n \cos nt = \frac{1-x\cos t-x^{r+1}\cos(r+1)t+x^{r+2}\cos rt}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x=1$ ist

$$x = y + z$$

gegeben, wo y und z an die Bedingungen gebunden sind:

$$y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}, \quad z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3},$$

$$yz = -\frac{q}{3};$$

von welchen drei Bedingungsgleichungen die letzte nur aussagt, dass das Product der zusammengehörigen Werthe von y und z reell sein müsse, wenn nämlich, wie wir hier annehmen wollen, die Coefficienten der Gleichung (2) gleichfalls reell sind.

Die Werthe von y^3 und z^3 werden reell oder imaginär, je nachdem

$$\left(\frac{q}{3}\right)^3 \gtrless -\left(\frac{r}{2}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{q}{3}\right)^3 < -\left(\frac{r}{2}\right)^2;$$

die beiden ersten von jenen Bedingungsgleichungen reduciren sich demnach im ersten Falle auf die Formen

$$y^3 = A, \quad z^3 = B;$$

im zweiten Falle auf die Formen

$$y^3 = A + iB, \quad z^3 = A - iB.$$

In beiden Fällen lässt sich demnach die Aufsuchung der drei Werthe, deren sowohl y als z fähig ist, immer nach der vorhin angegebenen Behandlung der Gleichung (1) leisten, und es tritt mithin der sogenannte Casus irreducibilis hier nicht in den Rang eines Ausnahmefalls, sondern es wird ihm im Geiste der Theorie der complexen Zahlen genau die nämliche Behandlung zu Theil, wie jedem andern in der Cardanischen Formel enthaltenen Falle.

Statt die bekannten allgemeinen Formeln zu entwickeln, die uns keine bestimmten Constructionen gestatten würden, ziehen wir es vor, die Sache an numerischen Beispielen zu erläutern.

Es sei 1) gegeben:

$$x^3 - 18.x + 12 = 0,$$

so hat man

$$y^3 = -6 + \sqrt{-180}, \quad z^3 = -6 - \sqrt{-180},$$
$$= -6 + i.13{,}416, \quad = -6 - i.13{,}416;$$

welche beiden complexen Werthe in Taf. VI. Fig. 7. construirt sind, wo AX die Richtung der positiven reellen und AY die Richtung der positiven imaginären Zahlen bezeichnet; $AB = -6$, $BC = i.13{,}416$, $BD = -i.13{,}416$. Um von hieraus zu den Formen

Die verlangte Summe ist nun $K-K'$.

Weitere Beispiele zu geben, halten wir für unnöthig. Wir haben nur auf diese Summirungsweise aufmerksam machen wollen, da ihr Gang ein einfacher und klarer ist. Es liessen sich noch mancherlei Formeln daraus ableiten, auf welche wir vielleicht später zurückkommen werden.

XLVIII.

Beiträge zu den Elementen der Geometrie.

Von

Herrn Rudolf Wolf,

Docenten der Mathematik und Archivar der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu Bern.

I.

Wenn ich mich längst zu der sich immer mehr Bahn brechenden Ansicht bekenne, dass die künstlichen Schranken zwischen einzelnen Theilen der Geometrie zusammenbrechen müssen, insofern diese Wissenschaft in ihrer innern Gliederung fortschreiten soll, — so halte ich namentlich dafür, dass die ebene Geometrie der Raumgeometrie durch eine gleichmässigere Behandlung beider näher zu bringen ist, und ich gebe mich der Hoffnung hin, dem mathematischen Publikum binnen Kurzem einen betreffenden Versuch vorlegen zu können. Folgendes möge zur Probe dienen.

Wie der Flächenberechnung in der Ebene der Satz: Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich gross oder haben gleichen Flächeninhalt, zu Grunde liegt, so gründet sich die Körperberechnung auf den Satz: Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich gross oder haben gleichen Rauminhalt. Für ersteren Satz wüsste ich keinen klareren Beweis zu geben, als den von Gerwien, wie er

$$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi}{3} = 2.2{,}449 . \cos 38^\circ 1' 54'' = 3{,}8587,$$

$$x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi+2\pi}{3} = 2.2{,}449 . \cos 158^\circ 1' 54'' = -4{,}5433,$$

$$x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi+4\pi}{3} = 2.2{,}449 . \cos 278^\circ 1' 54'' = 0{,}6845.$$

Es sei 2) gegeben

$$x^3 + 18x + 12 = 0,$$

hat man

$$y^3 = -6 + \sqrt{252}, \quad z^3 = -6 - \sqrt{252},$$
$$= 9{,}874 \qquad = -21{,}874;$$

iese beiden reellen Werthe durch die Punkte B und C, Taf. VI. g. 8., der Achse der reellen Zahlen dargestellt werden mögen, dem $AB = 9{,}874$ und $AC = -21{,}874$. Will man dieselben ter den Formen

$$y^3 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z^3 = \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

rstellen, so hat man zu setzen

$$\varrho = 9{,}874, \quad \varrho' = 21{,}874;$$
$$\varphi = 0, \qquad \varphi = \pi.$$

Die Werthe von y finden sich nun nach dem Obigen, indem n aus A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AD = \varrho^{\frac{1}{3}} = 2{,}1453$ nen Kreis construirt und diesen von D aus in drei gleiche Theile ilt; die Theilpunkte D, E, F entsprechen alsdann den drei erthen y', y'', y''' von y.

Ebenso finden sich die Werthe von z, wenn man gleichfalls s A einen Kreis mit dem Halbmesser $AG = \varrho'^{\frac{1}{3}} = 2{,}7967$ con-uirt und diesen von H aus in drei gleiche Theile theilt; hier ntsprechen die Theilpunkte J, H, K den drei Werthen z', z'', z''' n z.

Die zusammengehörigen Werthe von y und z, deren Summe usmacht, sind hier wieder durch die Bedingung charakterisirt, ss ihr Product reell sein soll. Mit Rücksicht darauf, dass nach m Obigen in diesem Falle die Summe der Winkelzahlen von y d z Null oder ein Vielfaches von π betragen muss, ist also x sammenzusetzen

entweder aus D und H, $x' = y' + z''$;
oder aus E und J, $x'' = y'' + z'$;
oder aus F und K, $x''' = y''' + z'''$;

glich erhält man unmittelbar aus der Figur

$$x' = \varrho^{\frac{1}{3}} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos \pi = -0{,}6514,$$

$$x'' = \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{2\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\pi}{3} + i\,(\varrho^{\frac{1}{3}} \sin \frac{2\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \sin \frac{\pi}{3})$$
$$= 0{,}3257 + i\,.\,4{,}2799,$$

$$x''' = \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{4\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos \frac{5\pi}{3} + i\,(\varrho^{\frac{1}{3}} \sin \frac{4\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \sin \frac{5\pi}{3})$$
$$= 0{,}3257 - i\,.\,4{,}2799.$$

Welche Abkürzungen sich bei dieser Rechnung anbring lassen, und wie sich daran eine allgemeine Behandlung der C danischen Regel knüpfen lässt, das ist ohne Mühe klar. Bemerk wollen wir nur noch, dass, so wie in der symmetrischen Lage Werthe von y gegen die von z in Taf. VI. Fig. 7. der Grund zu kennen ist, wesshalb bei der Addition die rein imaginären The verschwanden und alle drei Werthe von x reell wurden, ebenso der Verletzung dieser Symmetrie in Taf. VI. Fig. 8. der Grund gesu werden muss, wesshalb hier die imaginären Theile in zwei Fäl stehen bleiben und nur Ein reeller Werth von x erscheint. We die beiden Kreise in Taf. VI. Fig. 8. einander decken, während al übrige ungeändert bleibt, d. h. wenn $y^3 = -z^3$, so tritt eine symm trische Lage jener Werthe gegen die Achse AY ein, und es v schwinden mithin aus den Werthen von x die reellen Thei doch ist dieser Fall der stillschweigenden Voraussetzung ent gen, dass $r \gtrless 0$ sein soll.

3.

Man hat eine Formel, vermittelst deren man die Quadr wurzel aus einer complexen Zahl $a + ib$ auf algebraisch Wege findet, nämlich

$$\sqrt{(a+ib)} = \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)\right)} + i\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)\right)}.$$

Diese Formel finden wir durch geometrische Betrachtung wie fol

Wir übertragen die complexe Zahl $a + ib$ auf die Fo $\varrho\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, indem wir setzen

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

so werden nach Vorschrift der Gleichung (1) die beiden Wer von $\sqrt{((a+ib))}$ dargestellt durch

$$\varrho^{\frac{1}{2}}\,(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}) \text{ und } \varrho^{\frac{1}{2}}\,(\cos\frac{\varphi}{2}+\pi + i \sin\frac{\varphi}{2}+\pi),$$

§. 3.

Ist ein Bruch zusammengesetzt aus der (algebraischen) Summe einer Reihe von Brüchen, welche die Gestalt

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

haben, so ist das allgemeine Glied der aus ihm hervorgehenden Reihe offenbar gleich der (algebraischen) Summe der allgemeinen Glieder der Reihen, die durch Division aus den einzelnen Brüchen erzeugt werden. Und umgekehrt, ist das allgemeine Glied ein Inbegriff einer Reihe Formen der Gestalt

$$A \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}} x^n,$$

so ist der erzeugende Bruch auch ein Inbegriff einer Reihe von Brüchen der Gestalt

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

§. 4.

Das in §. 2. Aufgeführte gilt offenbar auch für den Fall, dass A und a imaginär sind.

Sei also $A = R(\cos T + i \sin T)$, $a = r(\cos t + i \sin t)$, so ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{R(\cos T + i \sin T)}{[r(\cos t + i \sin t) - bx]^m}$$

entstehenden Reihe:

$$R(\cos T + i \sin T) \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{r^{m+n}} \cdot \frac{x^n}{(\cos(m+n)t + i\sin(m+n)t)}$$

$$= \frac{R b^n x^n}{r^{m+n}} \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{\cos T + i \sin T}{\cos(m+n)t + i \sin(m+n)t} =$$

$$\frac{R b^n x^n}{r^{m+n}} \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} [\cos((m+n)t - T) - i \sin((m+n)t - T)].$$

Dessgleichen ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{R(\cos T - i \sin T)}{[r(\cos t - i \sin t) - bx]^m}$$

entstehenden Reihe:

$$\frac{R b^n x^n}{r^{m+n}} \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} [\cos((m+n)t - T) + i \sin((m+n)t - T)].$$

solche rechtwinklige Tetraeder besteht sodann der dem Pythagoräischen Theoreme analoge Satz: Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Quadratsumme der Katheten. — Wenn (Taf. VI. Fig. 14.) $\angle ABDC = \angle DABC = \angle ABCD = 90^0$, so folgt, da zwei zu einer dritten senkrechte Ebenen auch eine zu ihr senkrechte Kante haben müssen, dass $\angle(a, b) = \angle(a, c) = \angle(b, c) = 90^0$, und daher

$$ABC^2 = \frac{a^2 b^2}{4},\ ABD^2 = \frac{a^2 c^2}{4},\ BCD^2 = \frac{b^2 c^2}{4}.$$

Zieht man nun $e \perp d$, so folgt $f \perp d$ und $\angle(a, e) = 90^0$, und da nun $b.c = d.e$, so wird

$$ACD^2 = \frac{d^2 f^2}{4} = \frac{d^2(a^2+e^2)}{4} = \frac{d^2}{4}\left(a^2 + \frac{b^2 c^2}{d^2}\right) = \frac{a^2 d^2 + b^2 c^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2(b^2+c^2)+b^2 c^2}{4} = ABC^2 + ABD^2 + BCD^2,$$

w. z. b. w.

XLIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgabe aus der Stereometrie.

Von dem Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Unter den Namen der Archimedischen Körper führen einige Lehrbücher der Stereometrie eine Klasse von Polyedern auf, welche von regelmässigen Polygonen verschiedener Art (z. B. Quadraten und gleichseitigen Dreiecken) dergestalt begränzt werden, dass an jeder Ecke gleichviel Polygone von einerlei Art zusammenstossen. Diese Körper, die mithin einen natürlichen Fortschritt von den sogenannten Platonischen Körpern aus bilden, geben Anlass zur Aufstellung folgender Aufgabe mit mehreren Unbekannten:

XLVI.

Ueber die geometrische Darstellung complexer Functionen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

1.

Wenn man sich von dem Laufe einer Function $y=f(x)$, wo y und x nur reeller Werthe fähig sind, ein anschauliches Bild entwerfen will, so pflegt man in einer Ebene die Werthe von x und y als rechtwinklige Abscissen und Ordinaten zu construiren und die Endpunkte dieser letzteren durch einen Zug zu verbinden, der sodann die geometrische Darstellung jener Function abgiebt. Diese Veranschaulichung hört aber auf anwendbar zu sein, sobald für x und y auch imaginäre Werthe zugelassen werden sollen, und so pflegt man z. B. überall, wo für gewisse reelle Werthe von x die Werthe von y ins Imaginäre fallen, die betreffende Curve als geschlossen anzusehen und darüber hinaus von einer geometrischen Darstellung der gegebenen Function nicht weiter zu reden. So schätzbar nun aber — und zwar nicht für Lernende allein — selbst zur Lösung rein analytischer Fragen jenes geometrische Hülfsmittel ist, eben so wichtig wird die Frage, ob und wie dasselbe auch auf imaginäre Functionen Ausdehnung finden könne: eine Frage, welche in der von Gauss gegebenen Möglichkeit, imaginären Zahlen eine geometrische Bedeutung abzugewinnen, eine befriedigende Antwort zu versprechen scheint. Wir wollen nachstehend einige Untersuchungen darüber anstellen, wie weit man hierin gelangen kann, und welche Anwendungen sich daraus sowohl für die analytische Geometrie, als auch rückwärts für die Theorie der complexen Zahlen ziehen lassen.

2.

Wollte man unter der Voraussetzung, dass sowohl für x als auch für y imaginäre Werthe zugelassen werden sollen, allgemein

Das allgemeine Glied der durch K' entstehenden Reihe ist

$$\frac{(n+r+2)(n+r+3)}{1.2}x^{n+r+1}$$

$$=\left[\frac{n^2+(2r+5)n+(r+2)(r+3)}{1.2}\right]x^{n+r+1}$$

$$=\left[\frac{(n+1)(n+2)+(2r+5-3)(n+1)+r^2+3r+4}{1.2}\right]x^{n+r+1}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^{n+r+1}+\frac{2r+2}{1.2}(n+1)x^{n+r+1}+\frac{r^2+3r+4}{1.2}x^{n+r+1};$$

folglich der erzeugende Bruch

$$K'=\frac{x^{r+1}}{(1-x)^3}+(r+1)\frac{x^{r+1}}{(1-x)^2}+\frac{r^3+3r+4}{2}\cdot\frac{x^{r+1}}{1-x}$$

$$=\frac{x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2})-x^{r+2}(r^2+4r+5)}{(1-x)^3}+\frac{\frac{r^2+3r+4}{2}x^{r+3}}{(1-x)^3}.$$

Mithin

$$\sum_0^r\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n=$$

$$\frac{1-x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2})+x^{r+2}(r^2+4r+5)-x^{r+3}(\frac{r^2+3r+4}{2})}{(1-x)^3}.$$

3) Es soll die Summe $\sum_0^r x^n\cos nt$ angegeben werden.

Nach §. 4. ist hier $R=1$, $b=1$, $r=1$, $T=t$, also

$$K=\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x^{n+r+1}\cos(n+r+1)t$ als allgemeines Glied ist $R=b=x=$ $T=-(rt)$, mithin

$$K'=\frac{\cos(r+1)t-x\cos rt}{1-2x\cos t+x^2}x^{r+1},$$

folglich

$$\sum_0^r x^n\cos nt=\frac{1-x\cos t-x^{r+1}\cos(r+1)t+x^{r+2}\cos rt}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x=1$ ist

Nachlasses erzählt v. Murr in seinem Journal für Kunstgeschichte. Thl. 3. S. 727. Dr. Hansch, Collegiat in Leipzig, hatte ums Jahr 1710 die Handschriften um 100 Fl. in Danzig erkauft, und erlangte von dem Kaiser Karl VI. das Versprechen von 4000 Fl. zu der Herausgabe; doch ward ihm nach Ueberreichung des ersten Bandes der Titel eines kaiserlichen Raths und eine goldene Kette verliehen, aber die Unterstützung versagt. In Frankfurt a. M. gedachte er dennoch den Druck zu bewerkstelligen, und verlor darüber seine Collegiatur zu Leipzig. Auch die Ausgabe des liber de calendario Gregoriano. 1726. vermochte nicht die kaiserliche Zusage der Erfüllung näher zu bringen. Die Keplerschen Handschriften waren indessen zu Frankfurt für 828 Fl. versetzt worden, wo sie in Vergessenheit geriethen, bis sie v. Murr im Jahre 1774 für die Akademie in Petersburg erkaufte. Dort ward alsbald ein Plan zur Herausgabe entworfen, blieb aber ohne Ausführung. Vielleicht, dass nun Mitglieder der Akademie in Petersburg mitwirkend eintreten, und das für die Wissenschaft wichtige, das Andenken des grossen Mannes erneuernde Werk vollenden (Jenaische Literatur-Zeitung. 1845. Nr. 194. S. 775.).

Die mathematische Gesellschaft in London.

Gegen Mitte Juni 1845 fand die Einverleibung der seit 1717 bestehenden „Mathematischen Gesellschaft“ in die „Astronomische Gesellschaft“ statt. Dieses Ereigniss ist insofern von Interesse, als die Gründung des erstgenannten Vereins eine ganz auf das Volk und seine Bildung berechnete war. Was heutzutage die sogenannten Mechanic institutions und Lyceums in den englischen Fabrikstädten sich nach vielseitigerer Richtung hin zur Aufgabe stellen, das suchte diese Gesellschaft in besonderm Bezug auf mathematische und physikalische Wissenschaften durch gegenseitigen Unterricht, Vorlesungen und dergleichen zu erreichen. Der Grundsatz, welcher an der Spitze der Gesellschaftssatzungen stand, lautete: „Es ist die Pflicht jedes Mitgliedes, wenn es um Auskunft über eine mathematische oder naturwissenschaftliche Frage von einem Andern angegangen wird, Letzterem in der fasslichsten und deutlichsten Weise, deren es fähig, Aufschluss zu ertheilen.“ Ursprünglich zählte die Gesellschaft 64 Mitglieder, später 81, Quadratzahlen, die als Symbole gelten mochten. Zum grossen Theil bestand sie aus Leuten von niederm Herkommen, die sich aus eigenem Triebe und eigner Kraft zum Denken und Forschen emporgearbeitet, sogenannten Autodidakten, und doch befanden sich Männer darunter, die sich einen europäischen Namen erwarben. So Dollond und Thomas Simpson, welcher Letztere von der Gesellschaft von seinem Webstuhle in Spitalfields hervorgezogen wurde, um in der Woolwich Academy Mathematik zu lehren. Wie heute noch ein grosser Theil der Handwerkervereine in Deutschland, legte man sich bei den Versammlungen.

oder, wie man im Geiste der analytischen Geometrie schreiben würde,

$$y = F(x', x'')$$

als Gleichung der resultirenden Fläche

Setzt man ebenso im zweiten Falle $y = y' + iy''$ und zerfällt $f(x)$ in die beiden Theile $\varphi(x) + i\psi(x)$, so sind gleichfalls im Geiste der analytischen Geometrie

$$y' = \varphi(x), \quad y'' = \psi(x)$$

die beiden Gleichungen der entstehenden Linie.

4.

Es liegt auf der Hand, dass die beiden angegebenen Constructionsmethoden auch dann noch anwendbar bleiben, wenn für beide veränderliche x und y imaginäre Werthe zugelassen werden, aber zugleich eines von den vier Bestimmungsstücken dieser beiden complexen Werthe in der Construction unbeachtet bleiben darf. Mit Hülfe dieser Bemerkung sind wir im Stande, die Mehrzahl der bis jezt gegebenen Beweise des Satzes:

dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann,

an dem Faden der genannten Constructionsmethoden systematisch zu reproduciren.

Es sei die Function $y = f(x)$ von der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n,$$

und man erhalte durch die Substitution

$$x = p + iq = r(\cos t + i \sin t)$$

das Resultat

$$y = P + iQ = R(\cos T + i \sin T),$$

so ist zu beweisen, dass man durch schickliche Wahl von x zu dem Resultate $y = 0$, d. h. entweder

$$R = 0,$$

wobei T jeden beliebigen Werth haben kann, oder gleichzeitig

$$P = 0, \quad Q = 0$$

gelangen könne.

Beweis von Cauchy *).

Am nächsten dürfte es liegen, da in dem geforderten Endresultate der Werth von T gleichgültig ist, die Grösse

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

als Function von x zu construiren, wobei nach der ersten der obigen Constructionsmethoden zu verfahren sein würde. Die entstehende Fläche liegt, da R nur positiv ist, vollständig auf Einer Seite der Ebene der x; ferner, wenn x über eine gewisse Grösse hinaus wächst, so entfernt sie sich immer weiter von der Ebene der x; folglich muss sie in der Nähe des Nullpunkts dieser Ebene nothwendig wenigstens Ein Minimum besitzen.

Dass nun dieses Minimum nicht von Null verschieden sei, wird von Cauchy auf rein analytischem Wege gezeigt. Wie man zu demselben Resultate auch durch eine geometrische Betrachtung gelangen könne, bei welcher der bis dahin vernachlässigte Werth von T wieder in die Construction hineingezogen wird, haben wir in einem früheren Artikel zu zeigen gesucht; doch gehört diese Betrachtung im Grunde nicht hieher, weil sie das bisherige geometrische Bild verlässt, und findet besser weiter unten ihren Platz.

Dritter Beweis von Gauss **).

Nicht so unmittelber scheint es sich darzubieten, die Grösse

$$T = \text{arc } tg\left(\left(\frac{Q}{P}\right)\right)$$

als Function von x nach der ersten Methode zu construiren, welche Grösse nämlich für den in Frage stehenden Fall durch die Bedingung charakterisirt wird, dass sie eines jeden beliebigen (reellen) Werthes muss fähig sein. Im Allgemeinen ist T eine vielförmige Function von x, der für jeden Werth des x unendlich viele um je π von einander verschiedene Werthe zukommen; folglich entsprechen im Allgemeinen jeder complexen Abscisse unendlich viele um je π von einander verschiedene Ordinaten, und die resultirende Fläche besteht demnach aus einem Systeme über einander liegender Schichten, die um einen Abstand von je π, diesen im Sinne der Ordinaten gemessen, von einander entfernt sind. Nur für solche Werthe von x, welche $f(x) = 0$ machen, muss nach dem obigen Gesagten die ganze Ordinate in die Fläche hineinfallen; von welcher eigenthümlichen Beschaffenheit der Fläche man sich etwa dadurch ein Bild machen kann, dass man sie mit einer Schraubenfläche vergleicht, welche sich um jene Ordinate wie um eine Spindel herumwindet; oder auch so, dass jede einzelne Schicht

*) Analyse algébrique. Chap. X.

**) Commentationes soc. reg. Gotting. recentiores. Tom. III.

wie in §. 3., sondern jedem einzelnen Werthe von r entspricht schon in der zugehörigen Ordinaten-Ebene eine geschlossene Curve, deren Radius vector $= R$ und Elongation $= T$ ist, und das Continuum aller dieser Curven von $r=0$ bis $r=\infty$ bildet eine krumme Fläche, die eine Art von kegelförmigem Raum umschliesst. Dieser Raum ist im Sinne der wachsenden r offen, und läuft mit $r=0$ in einen Punkt aus, dessen Lage auf der Ebene der y durch das letzte Glied a_n der Gleichung $f(x)=0$ festgestellt wird.

Der in Frage stehende Beweis verlangt nun die Nachweisung, dass die entstandene Fläche nothwendig Einen Punkt mit der Achse der r gemein haben muss, und dieses wird nachgewiesen sein, sobald sich zwei zur Achse der r normale Schnitte jener Fläche angeben lassen, von denen der eine ganz ausserhalb der Achse liegt, der andere aber diese Achse umschliesst. Als den einen Schnitt kann man aber die Spitze der kegelförmigen Fläche für $r=0$ ansehen, welche niemals mit der Achse zusammenfallen kann; und den andern weist Deahna dadurch nach, dass für ein hinlänglich grosses r der Werth von $\frac{\partial T}{\partial t}$ stets positiv bleibt, mithin T zugleich mit t wächst, und folglich, während t von 0 bis π sich ändert, T gleichfalls das nämliche Intervall durchlaufen muss.

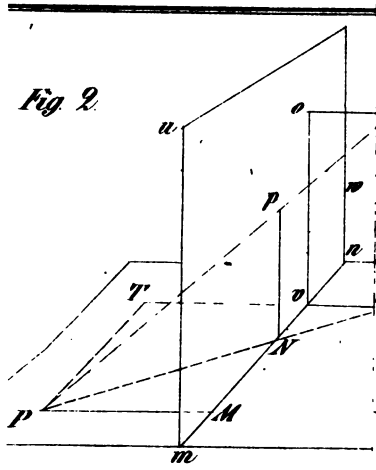
Der hier angegebenen Form des Beweises können wir sogleich noch eine andere Fassung desselben zur Seite stellen, durch welche wir wieder auf den Beweis von Cauchy zurückgeführt werden. Um nämlich zu zeigen, dass die genannte Fläche nothwendig Einen Punkt mit der Achse der r gemein haben muss, nehmen wir willkürlich einen ausser der Achse liegenden Punkt in jener Fläche an; und können wir nun nachweisen, dass, wie auch dieser Punkt gewählt sein mag, man immer einen zweiten Punkt jener Fläche angeben kann, der der Achse näher liegt, so ist gleichfalls der in Rede stehende Satz bewiesen. Diese Nachweisung haben wir aber auf geometrischem Wege Th. VI. Nr. XXXV. des Archivs geliefert, indem unsere dortige Ebene der complexen Zahlen als identisch mit der jetzigen Ebene der y angesehen werden kann, nachdem auf diese die beiden betrachteten Punkte der krummen Fläche projicirt worden sind.

Die Reihe dieser Beweise scheint uns, so weit die geometrische Darstellung der Sache in Betracht gezogen wird, ein vollständig in sich abgeschlossenes Ganzes zu bilden, wovon wir namentlich das als Beweis anführen möchten, dass wir in der That den Beweis von Deahna auf dem oben angegebenen Wege selbstständig gefunden und erst hinterher uns überzeugt haben, dass dieser Beweis im Wesentlichen nicht neu war.

5.

Die analytische Geometrie beschäftigt sich in ihrem planimetrischen Theile mit Linien in der Ebene, und in ihrem stereometrischen Theile mit Linien im Raume und mit Flächen; sie drückt jede Linie in der Ebene durch eine Gleichung zwischen zwei

Fig. 2.



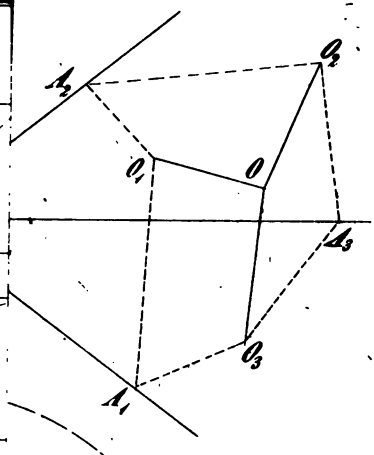
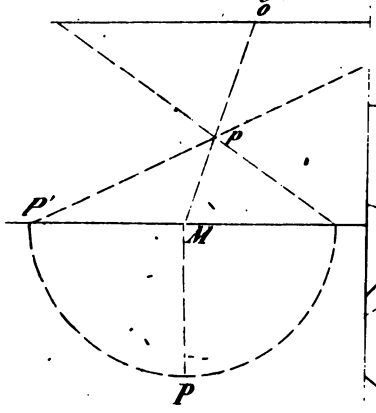
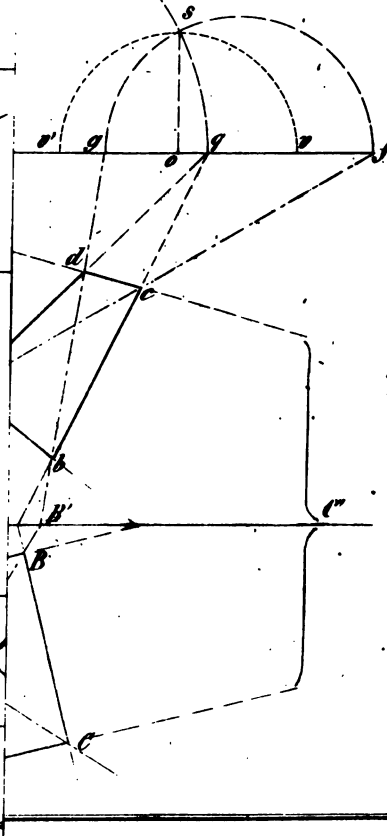


Fig. 4.





wickelungen solche Vorzüge besitzt, dass wir hoffen dürfen, sie bald in den Unterricht und die betreffenden Lehrbücher aufgenommen zu sehen.

Untersuchen wir, um an einem einfachen Beispiele den Geist dieser neuen Behandlung anschaulich zu machen, die Bedeutung einer Gleichung vom ersten Grade zwischen zwei Veränderlichen

$$Ay + Bx + C = 0,$$

wo können 1) für reelle Werthe der Coefficienten A, B, C auch die Veränderlichen x und y im einfachsten Falle nur reeller Werthe fähig sein, und die Gleichung stellt in diesem Falle eine gerade Linie in der Ebene xy dar, wie bekannt.

Werden dagegen 2) für A, B, C auch complexe Werthe zugelassen, so kann die Gleichung nur bestehen, wenn von den beiden Veränderlichen x und y mindestens die eine gleichfalls complexe Werthe annehmen darf. Es sei y diese Veränderliche, so findet man durch Auflösung für y

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

wofür man zur Abkürzung schreiben kann

$$y = ax + b,$$

wo a und b im Allgemeinen wieder complexe Zahlen sind. Zur Construction dieser Gleichung legen wir nun eine Achse der x und eine Ebene der y zum Grunde; dass die Gleichung alsdann aber eine gerade Linie im Raume darstellt, lässt sich genau eben so zeigen, wie man es in der Ebene zu thun pflegt.

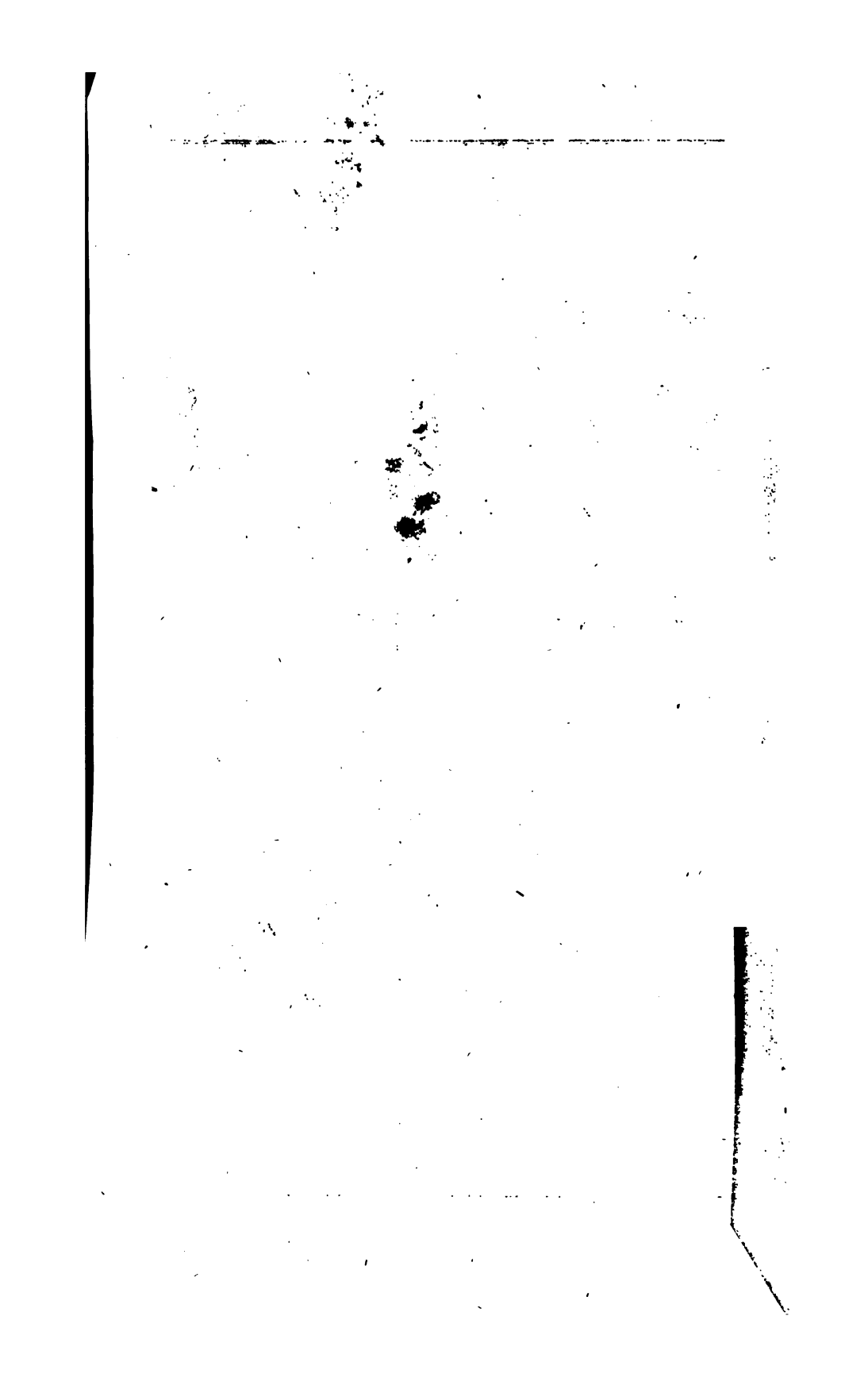
Es ist nämlich der Quotient $\frac{y-b}{x} = a$, also constant; folglich bezeichnet

$$y - b = ax,$$

wo für den Augenblick $y-b$ als Ordinate angesehen werden mag, eine durch den Nullpunkt des Systems gehende gerade Linie, die in einer durch die x Achse gelegten Ebene zu Stande kommt, welche gegen die Ebene xy' eine Neigung = Arc. a besitzt; die Neigung dieser Linie gegen die x Achse selbst wird durch einen Winkel bestimmt, dessen trigonometrische Tangente = Mod. a ist. Dieser letzte Winkel kann, da Mod. a stets positiv ist, nur zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$ enthalten sein; doch liegt darin keine Beschränkung, da Arc. a eines jeden Werthes zwischen 0 und 2π fähig ist.

Die Gleichung

$$y = ax + b$$



tauschung der Coordinaten allerdings einiges Unbequeme hat, namentlich sobald man Betrachtungen der einen Art in solche der andern Art hineinziehen will, so wollen wir ihr dennoch für unsern gegenwärtigen Zweck bis zu Ende treu bleiben.

Untersuchen wir nun, um von unsern zuletzt gewonnenen Resultaten einige Anwendung zu machen, zunächst die Lage zweier geraden Linien gegen einander, deren Gleichungen seien

$$y = ax + b,$$
$$y = cx + d;$$

so wird die Existenz eines Durchschnittspunktes beider Linien an die Bedingung gebunden sein, dass die gleichzeitige Gültigkeit beider Gleichungen nothwendig für die Veränderliche x einen reellen Werth zu liefern habe. Da nun die Gleichsetzung $y=y$ liefert

$$x = \frac{d-b}{a-c},$$

so ist

$$\text{Coëff. imag.} \left(\frac{d-b}{a-c}\right) = 0$$

die gesuchte Bedingungsgleichung; und wenn diese erfüllt ist, so sind

$$x = \frac{d-b}{a-c} \text{ und } y = \frac{ad-bc}{a-c}$$

die Coordinaten des Durchschnittspunktes.

Jene Bedingungsgleichung wird z. B. erfüllt, wenn alle Constanten reell sind, wie bekannt; ferner wenn man hat $d=b$, denn alsdann schneiden sich beide Gerade in der Ebene der y; sie wird auch erfüllt, falls man die Sache so ansehen will, wenn man hat $a=c$, denn alsdann sind beide Gerade einander parallel. Ist gleichzeitig $d=b$ und $a=c$, so decken die Linien einander.

Um den Winkel λ zu finden, den jene beiden geraden Linien mit einander einschliessen, denken wir uns zu beiden durch den Nullpunkt des Systems Parallelen gelegt; ausserdem werde aus diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $=1$ eine Kugelfläche construirt, auf welcher sowohl die Durchschnittspunkte jener beiden Parallelen als auch der Durchschnittspunkt der positiven Seite der Achse der x vorkommen. Alsdann ist der gesuchte Winkel λ Seite eines sphärischen Dreiecks; und setzt man

$$a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$c = \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi');$$

so wird

bald $x^2 > a^2$ wird. Nehmen wir also, wie früher, zu der Achse der x eine Ebene der y, und bezeichnen in letzterer mit y' die Achse der reellen und mit y'' die Achse der imaginären Zahlen, so erhalten wir vermöge jener Gleichung eine Curve, die von $x=-a$ bis $x=a$ ganz in der Ebene xy' liegt, in den Punkten $x=\pm a$ die Achse der x durchschneidet, und von hier an, nämlich von $x=a$ bis $x=\infty$ und von $x=-a$ bis $x=-\infty$, ganz in die Ebene xy'' hineinfällt. Jenen ersten Theil der Curve nennt man Ellipse, diesen letzten Hyperbel, und es zeigt sich mithin, dass von unserm hier entwickelten Standpunkte aus Ellipse und Hyperbel nur Theile einer und der nämlichen Curve sind, welche man vollständig erhält, wenn man alle Werthe von y für $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ in Betracht zieht. Zugleich ist hieraus auf der Stelle klar, mit welchem Rechte man die Hyperbel eine Ellipse mit imaginärer Nebenachse, oder auch die Ellipse eine Hyperbel mit imaginärer Nebenachse nennen könne; denn die letztere Benennung ist dadurch gerechtfertigt, dass die vorstehende Betrachtung auch von der Gleichung der Hyperbel hätte ihren Auslauf nehmen können.

Dem Kreise gehört hiernach eine gleichseitige Hyperbel mit gleicher Hauptachse als nothwendige Ergänzung zu, welche mit ihm die Achse der x gemeinschaftlich besitzt, aber in einer zu der Ebene des Kreises normalen Ebene liegt.

Die Gleichung der Parabel

$$y = \pm\sqrt{px}$$

liefert, wenn p als positiv vorausgesetzt wird, reelle Werthe für positive x und imaginäre Werthe von der Form

$$y = \pm i\sqrt{-px}$$

für negative x. Sie erstreckt sich mithin gleichfalls von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, und zwar besteht sie aus zwei congruenten Theilen, von denen der eine von $x=0$ bis $x=+\infty$ ganz in die Ebene xy', der andere aber von $x=0$ bis $x=-\infty$ ganz in die Ebene xy'' hinein fällt. Von diesen beiden Theilen wird gewöhnlich schon jeder für sich eine Parabel genannt, während sie hier erst zusammengenommen die vollständige Curve ausmachen.

Allgemein kann man hieran die Bemerkung knüpfen, dass, wenn

$$F(x, y) = 0$$

eine algebraische Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y bezeichnet, die in dieser Gleichung enthaltene Curve stets sich von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ erstrecken muss; denn es ist bei diesen (vergl. §. 4.), dass für jeden Werth von x sich stets ein complexer Werth von y muss angeben lassen, welcher der Bedingung der Gleichung $F(x, y) = 0$ genügt. Es kann mithin bei unserer Auffassung der Sache keine im Sinne der x geschlossene algebraische Curve geben.

Dieselbe Bemerkung lässt sich auch auf diejenigen Flächen übertragen, welche in einer algebraischen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen enthalten sind. Beide Bemerkungen zusammen genommen aber können als der geometrische Ausdruck des in §. 4. behandelten algebraischen Fundamental-Theorems angesehen werden.

XLVII.

Zur Entwickelung in Reihen und Summirung der Reihen.

Von dem

Herrn Doctor Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

§. 1.

Der Bruch

$$\frac{1}{a-x}$$

giebt, wenn man theilt, die Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\ldots+\frac{x^n}{a^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)},$$

und wir wollen $\frac{x^n}{a^{n+1}}$ das allgemeine Glied dieser Reihe nennen, so dass die Reihe dargestellt werden kann durch

$$\sum_0^n \frac{x^n}{a^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}}\cdot\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a-x}.$$

Das Ergänzungsglied erzeugt durch fortgesetzte Division die weiteren Glieder der Reihe. $\frac{1}{a-x}$ soll der erzeugende Bruch für die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{x^n}{a^{n+1}}$ ist, heissen. Eben so

OCT 4 1937

Dasselbe gilt auch für den zweiten und dritten Fall. Es ist nämlich allgemein:

$$(\overset{1}{m}-m)_n = 0 = \overset{1}{m}_n + \overset{1}{m}_{n-1}(-\overset{1}{m})_1 + \overset{1}{m}_{n-2}(-\overset{1}{m})_2 + \ldots + \overset{1}{m}_1(-\overset{1}{m})_{n-1} + (-\overset{1}{m})_n$$

Im ersten Falle ist diese Reihe vollgliederig, im zweiten ebenfalls, im dritten aber ist, da

$$(-\overset{1}{m})_r = \frac{(-m)(-m+1)(-m+2)\ldots(-m+r)}{1.2\ldots r},$$

für $r \gtrless m$, $(-\overset{1}{m})_r = 0$, was auf unsern Satz zurückkommt. Das allgemeine Glied der aus dem Bruche $\frac{1}{(a-x)^m}$ entstehenden Reihe ist also

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{x^n}{a^{m+n}} = \overset{1}{m}_n \frac{x^n}{a^{m+n}},$$

und man erhält die Reihe, wenn man $n = 0, 1, 2, \ldots$ setzt, dabei aber $\overset{1}{m}_0 = 1$ annimmt (M. s. die vorher angeführte Abhandlung im ersten Theile.).

Das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

entstehenden Reihe ist folglich

$$A\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}} x^n,$$

und das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{A}{a-bx}$$

entstehenden Reihe:

$$A\,\frac{b}{a^{n+1}}\,x^n$$

Umgekehrt auch wird eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$A \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}} x^n$$

ist, zum erzeugenden Bruch haben:

$$\frac{A}{(a-bx)^m}.$$